第十八單元正餘弦函數的疊合

十五單元介紹了正弦函數與餘弦函數的圖形與性質，它們的圖形都呈波浪形且週期性的重複出現，這樣的圖形常用來描述波動的現象，像是地震的震波、振動的琴弦所產生的聲波以及雷達、微波爐、手機等發出的電磁波。像是地震時建築物會受到外力而搖晃，如果震波中某一波動的週期，恰好與建築物振動的週期相同的話，那麼兩者就會產生「**共振現象**」使得振幅變大，此時建築物就容易倒塌。當兩個波振動週期相同時，經由「**疊合**」後，會產生所謂「共振現象」，這是本節所要討論的重點：「**正弦與餘弦函數的疊合**」。

(甲)正弦函數與簡諧運動

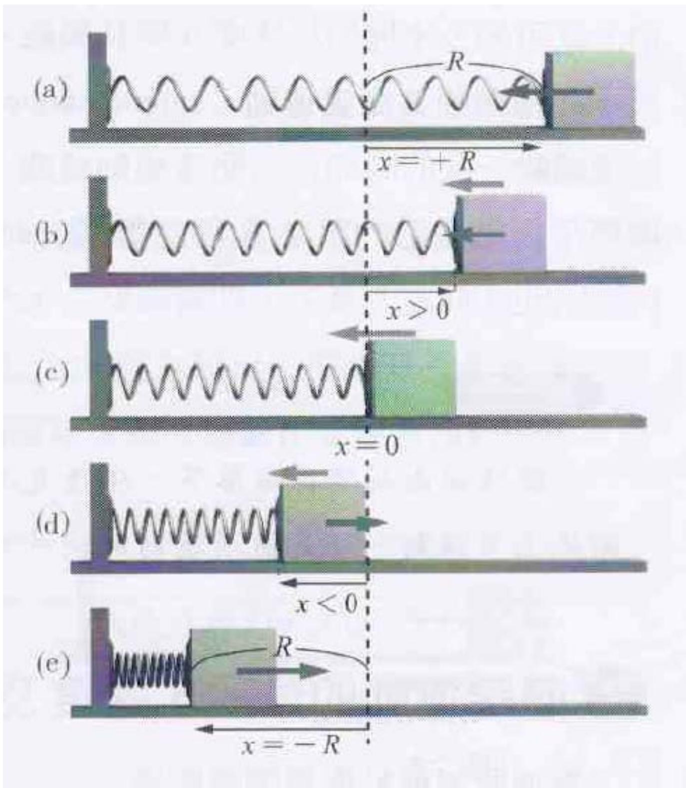
(1)簡諧運動

在自然界或日常生活中常可以看到許多週期性的振動現象，例如樂器簧片或琴弦的振動、彈簧的伸縮、水面上小船的沉浮或鐘擺的擺動等。此外水波、聲波、電磁波、…等波動現象和振動有關。不管這些振動現象多複雜，它們都是由一種最簡單、最基本的振動所組成。這些振動的頻率和振幅可能不同，但是運動的模式相同。

這種振動稱爲簡諧運動(simple harmonic motion)，簡稱 SHM。

例如：彈簧的振動具有週期性

將將一木塊繫於彈簧端點，一起放置於光滑水平桌上，彈簧另一端固定於牆上。當彈簧未被伸長或壓縮時，木塊所受淨力爲零，此時位置稱爲平衡點。如右圖(a)所示，施力使彈簧向右伸長，木塊離開平衡點的距離爲 R 後放手，由於彈簧回復力作用在木塊上，使得木塊由靜止開始向左移動。因爲回復力產生方向向左的加速度，所以木塊的速度會愈來愈快(如圖(b))。當木塊抵達平衡點時，雖然回復力爲零，但仍有加速度，會繼續向左移動(如圖(c))。木塊向左通過平衡點後，由於彈簧開始被壓縮，彈簧作用在木塊的回復力與其產生的加速度變成向右,使得木塊開始減速(如圖(d))。當木塊速率爲零時，此時抵達最左邊，離開平衡點亦爲 R。此時木塊仍受回復力向右並且回到原始位置。木塊如此來回振動，就形成了週期性的運動。



根據虎克定律，當木塊偏離平衡點的位移爲 x 時，彈簧作用在木塊的回復力 F 與 x 成正比，兩者的方向相反。即 F=$-kx$

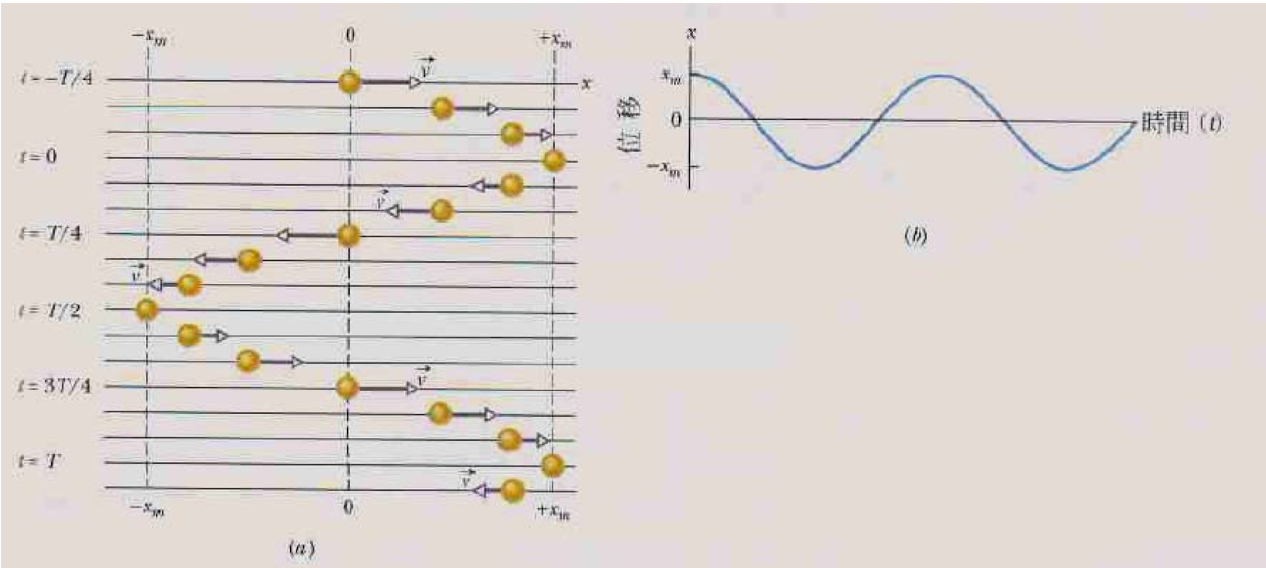
若木塊的質量爲 m，根據牛頓第二運動定律，木塊的加速度 $a=\dfrac{-kx}{m}$。

由上式可知，木塊的加速度 a 與其偏離平衡點的位移 x 成正比，兩者的方向相反，此種運動就是簡諧運動(simple harmonic motion)。木塊來回往返運動一次的時間稱為簡諧運動週期 T(period)，離開平衡點最遠位置稱為端點，離開平衡點最遠距離 R 稱為振幅(amplitude)向右為正(向左為負)，則兩端點為 $x=\pm R$。

(2)用正弦函數描述 SHM

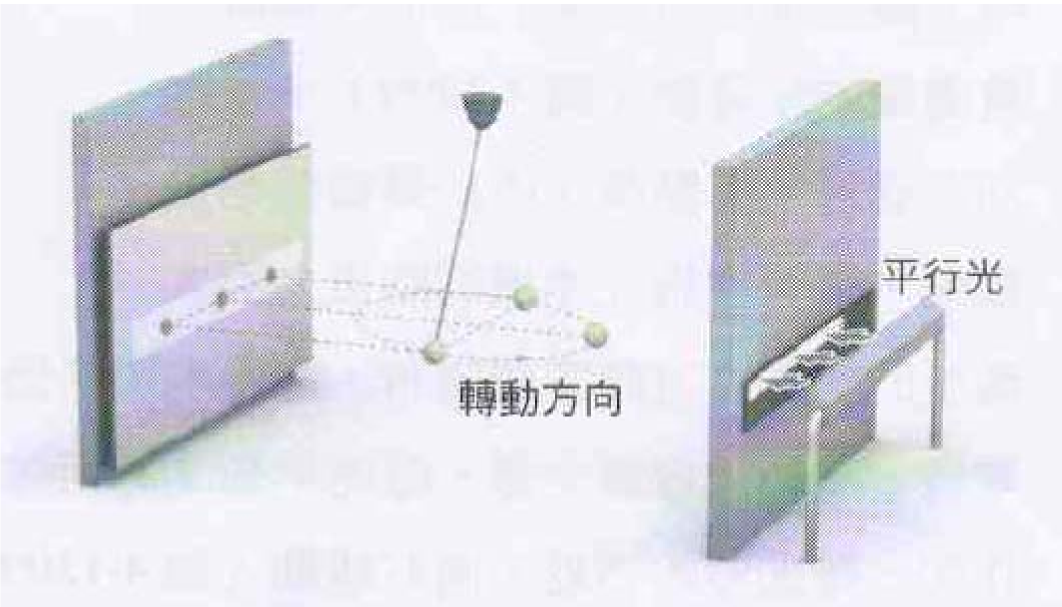
下圖是一個簡諧運動連續取樣時間與位移的圖，將下圖(a)旋轉 90°可以得到下圖(b)，下圖(b)是一個型如$x(t)=x_m\cos(\omega t+\varphi)$的圖形，由於正餘弦函數均可以化成$y=A\sin(\omega t+t_0)$的形式。

因此我們可以利用正弦(餘弦)函數來描述簡諧運動。



(3)簡諧運動與圓周運動

等速圓周運動與簡諧運動皆為週期運動，如圖所示



一小球在水平面上作等速率圓周運動，從其側面以平行光照射之，則豎立在另一側的光屏上會顯示出小球的投影軌跡。球影來回往復運動其實就是簡諧運動。

下面的實例來說明：

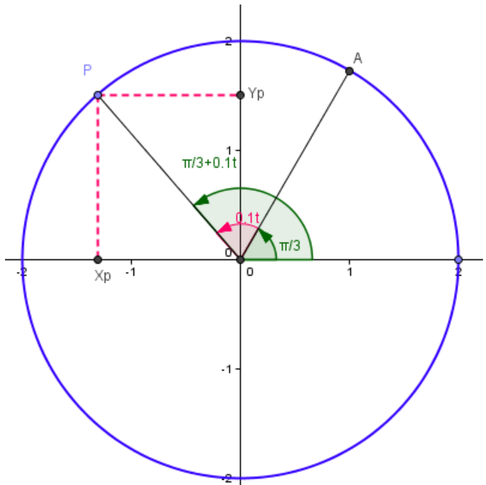
例題：

有一個質點P在$x^2+y^2=4$上作等速率圓周運動，一開始P點從A$(2\cos\frac{\pi}{3}\ ,2\sin\frac{\pi}{3})$出發，繞原點O逆時針旋轉，每秒的速率為 0.1 弧度/秒，試求

(1)當t=2 時P點的坐標。

(2)當 P 點逆時針繞一圈時，t 等於多少秒？

(3)設 P 點的坐標為$(x(t)\ ,y(t))$，試求 $x(t)$與 $y(t)$。



解法：

(1)當 t=2 時,P 點的方向角為$\frac{\pi}{3}+0.1\times2$ 弧度，

根據廣義角正餘弦的定義，

可以得知 P 點的坐標為$(2\cos(\frac{\pi}{3}+0.2)\ ,2\sin(\frac{\pi}{3}+0.2))$。

(2)設 t 秒後，P 點逆時針繞一圈，此時 P 點所代表的方向角為 2π，因此 $0.1t=2\pi$，

故 $t=\frac{2\pi}{0.1}=20\pi$(秒)。

(3)因為 P 點繞原點 O 逆時針旋轉，每秒的速率為 0.1 弧度/秒，所以 t 秒之後，

$\angle AOP=0.1t$(弧度)，故 P 點對應的方向角為$\frac{\pi}{3}+0.1t$(弧度)

根據廣義角正餘弦的定義，t 秒之後 P 點的坐標為$(2\cos(\frac{\pi}{3}+0.1t)\ ,2\sin(\frac{\pi}{3}+0.1t))$

所以 $x(t)=2\cos(\frac{\pi}{3}+0.1t)$與 $y(t)=2\sin(\frac{\pi}{3}+0.1t)$。

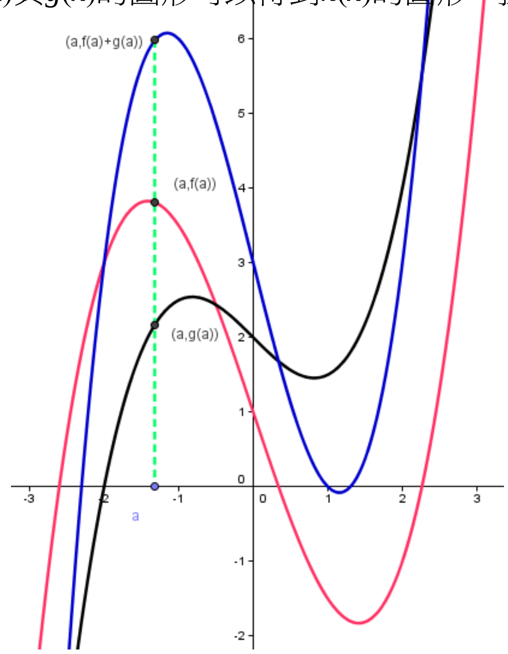
上例中，質點 P 在 x 軸與 y 軸的坐標分別可以用函數 $x(t)=2\cos(\frac{\pi}{3}+0.1t)$與 $y(t)=2\sin(\frac{\pi}{3}+0.1t)$ 來表示，而且它們週期都為$\frac{2\pi}{0.1}=20\pi$，振幅都為 2。

一般而言，當質點P在圓$x^2+y^2=R^2$上，自點A$(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$開始以每秒速率$\omega$弧度/秒作等速率圓周運動。此時稱$\omega$為「**角速率**」，$t$秒後P點對應的方向角為$\alpha+\omega t$，因此週期都是$\frac{2\pi}{\omega}$的餘弦函數$x(t)=r\mathrm{R}\cos(\alpha+\omega t)$與正弦函數$y(t)=\mathrm{R}\cdot\sin(\alpha+\omega t)$可以分別描述P點的$x,y$坐標，$\alpha+\omega t$稱為此圓周運動的「**相位**」，當$t$=0 時，P點對應的方向角為$\alpha$，稱為此圓周運動的「相位角」。因此我們可以利用等速率圓周運動在直徑方向的投影來模擬簡諧運動，但是要特別注意，作等速率圓周運動的質點本身並非作簡諧運動。

(甲)正餘弦的疊合

(1)函數的疊合

給定函數$f(x)$與$g(x)$，考慮函數$h(x)=f(x)+g(x)$，$h(x)$圖形上的點$(x_0,h(x_0))$均可表為$(x_0,f(x_0)+g(x_0))$，因此透過$f(x)$與$g(x)$的圖形可以得到$h(x)$的圖形，我們稱$h(x)$為$f(x)$與$g(x)$的疊合。



因為正弦函數與餘弦函數都可以用來描述波動的週期現象，而兩個週期相同的波會產生共振現象，所以接下來會討論週期相同的正弦與餘弦函數疊合而成的新函數$y=a\sin kx+b\cos kx$之性質。

(2)$y=\sin x+\cos x$圖形的性質：

當我們相隔一段時間觀察兩個週期相同的波重疊的效應時，若用$y=A\sin x$表示其中一個波，另一個週期相同的波，因為觀察的時間差與不同的振幅，可以用$y=B\sin(x+x_0)$來表示。當兩波在同一個介質相向行進而重疊時，重疊範圍內介質質點的振動位移等於個別兩波所造成的位移的向量和。即兩個波重疊的效應可用$y=A\sin x+B\sin(x+x_0)$來表示。

根據和角公式：

$y=A\sin x+B\sin(x+x_0)=A\sin x+B(\sin x\cdot\cos x_0+\cos x\cdot\sin x_0)=(A+B\cos x_0)\sin x+B\sin x_0\cos x$

因此$y=A\sin x+B\sin(x+x_0)$可以化成$y=a\sin x+b\cos x$的形式(其中a,b為常數)。

故要描述兩個週期相同的波重疊的效應時，就要探討形如$y=a\sin x+b\cos x$的函數之性質。

首先我們從最簡單的形式$y=\sin x+\cos x$開始討論：

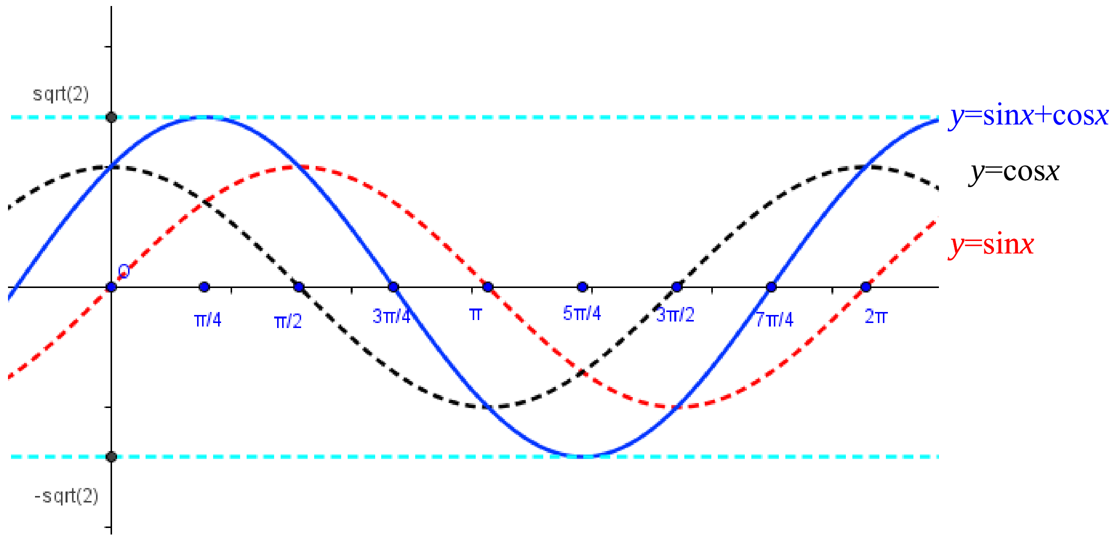
函數$y=\sin x+\cos x$的圖形會是什麼樣子？是否會是有規律的波浪形呢？

首先我們要問$y=\sin x+\cos x$的圖形會是什麼樣子？是否會是有規律的波浪形呢？

先用描點法並列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\sin x+\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1

畫出 $y=\sin x+\cos x$ 的圖形如下



從上圖中，可以觀察出 $y=\sin x+\cos x$ 的圖形基本上與 $y=\sin x$(或 $y=\cos x$)的圖形類似，都是週期等於 2π的波浪圖形，而且振幅變大了。因此猜測 $y=\sin x+\cos x$ 應該可以表成 $y=r\sin(x+\theta)$的形式，用和角公式來驗證我們的猜測。

$y=r\sin(x+\theta)$

$=r(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)$

$=(r\cos\theta)\sin x+(r\sin\theta)\cos x$

$=\sin x+\cos x$

所以得到$r\cos\theta=1$…..(1)且$r\sin\theta=1$……(2)

$a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1^2+1^2=2\Rightarrow a=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ 。

代入(1)(2)式可得$\cos\theta=\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以θ爲第一象限角，取$\theta=\frac{\pi}{4}$。

所以 $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$。

從另一個角度來看，直接利用和角公式，可得

$y=\sin x+\cos x$

$=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)$ (此處提出$\sqrt{2}$是經過選擇的)

$=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$

根據前面的說明，$y=\sin x+\cos x$ 的圖形是將 $y=\sin x$ 的圖形**鉛直伸縮$\sqrt{2}$倍**，**再向左平移$\frac{\pi}{4}$單位**。因此振幅爲$\sqrt{2}$，週期爲 2π，這樣的結論符合上面觀察的結果。

(3)疊合的方法：

考慮$y=f(x)=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$，$a,b$爲實數，仿照前例子的做法，亦可將$y=f(x)=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$化成$y=f(x)=r\sin(x+\theta)$

$y=r\sin(x+\theta)=r(\sin x\cdot\cos\theta+\cos x\cdot\sin\theta)=a\sin x+b\cos x$

$\Rightarrow\begin{cases} r\cdot\cos\theta=a\cdots(*) \\ r\cdot\sin\theta=b\cdots(**)\end{cases}$ $\Rightarrow(*)^2+(**)^2\Rightarrow r^2=a^2+b^2\quad\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 且 $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

θ的找法如下：

在以原點爲圓心之單位圓上，根據 $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 且 $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，先判別出θ終邊的位置，在找出θ的值。我們將這些結果寫成一個定理：

若設a,b爲實數，且$a^2+b^2\neq0$，
則函數$y=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x$可以表爲$y=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta)$，
其中θ爲滿足$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$的角θ。

[討論]：

如果選擇點 Q($\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$)，則點 Q 亦在單位圓上，因此可找到 一個角度φ，滿足 $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

於是 $y=a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$。

例如：

將 $y=f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 疊合成正弦與餘弦函數

(1)將 $y=f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 疊合成正弦函數先求兩係數的平方和

的正平方根$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，再將原式提出 2

$y=f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=2(\sin x\cdot\cos\theta+\cos x\cdot\sin\theta)=2\sin(x+\theta)$

$\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$且 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\theta$爲第一象限角$\Rightarrow$取$\theta=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow y=f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

(2) 將 $y=f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 疊合成餘弦函數先求兩係數的平方和的

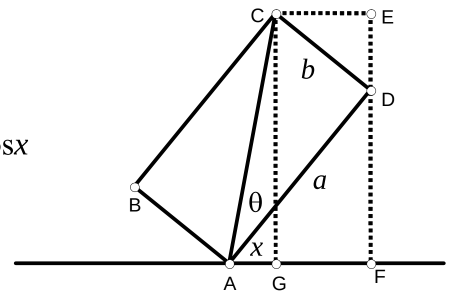
正平方根$=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，再將原式提出 2

$y=f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=2(\sin x\cdot\sin\theta+\cos x\cdot\cos\theta)=2\cos(x-\theta)$

$\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$且 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\theta$爲第一象限角$\Rightarrow$取$\theta=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow y=f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\cos(x-\frac{\pi}{3})$

(4)圖解正餘弦函數的疊合：



如圖，設$\angle DAF=x$，$\angle CAD=\theta$，可得$\overline{DF}=a\sin x$，$\overline{DE}=b\cos x$

$\Rightarrow\overline{DF}+\overline{DE}=a\sin x+b\cos x$

$\overline{CG}=\overline{AC}\cdot\sin(x+\theta)$，其中$\overline{AC}=\sqrt{a^2+b^2}$，而 $\tan\theta=\frac{b}{a}$

因爲$\overline{DF}+\overline{DE}=\overline{CG}$，所以 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$

結論：

(1)可將正餘弦函數的線性組合 $a\sin x+b\cos x$ 化成正弦函數，也可化成餘弦函數。

(2)$y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$的圖形是先將正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形左右平移$|\theta|$單位($\theta>0$ 時，左移；$\theta<0$ 時，右移)，再鉛直伸縮$\sqrt{a^2+b^2}$ 倍而得到的圖形。

(3)函數 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$的週期爲 2π，振幅爲$\sqrt{a^2+b^2}$，最大值爲$\sqrt{a^2+b^2}$，最小值爲$-\sqrt{a^2+b^2}$。

[例題1] 將函數$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$表示成$y=r\cos(x+\theta)$的形式，其中$r>0$ 且 $0<\theta<2\pi$。

解法：

若函數$y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$要化成$y=r\cos(x+\theta)$的形式

則$r\cos(x+\theta)$

$=r(\cos x\cos\theta-\sin x\sin\theta)$

$=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

因此r,θ 要滿足：$\begin{cases} r\cdot\cos\theta=1 \\ r\cdot\sin\theta=\sqrt{3} \end{cases}$

將上面兩式平方相加，可得$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1^2+(\sqrt{3})^2$

再利用平方關係，可得$r^2=1^2+(\sqrt{3})^2=4$

所以$r=2$(因爲$r>0$)，再代回原來的式子，可得

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$且$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可取$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 。

所以$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$可以化成$f(x)=2\cos(x+\dfrac{\pi}{3})$。

[例題2] 設$270°<A<360°$且$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2004°$，若$A=m°$，
則 $m=$ ________。(93 學科能力測驗) Ans：306

(練習1)設$\sin x-\sqrt{3}\cos x=a\cos(x-\theta)$，
其中$a>0$，而 $0<\theta<2\pi$，則$a=$__________，而$\theta=$__________。
Ans：$a=2$；$\theta=\dfrac{5\pi}{6}$

(乙)三角函數的極值

[例題3] 設 $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$，在下列範圍內，求 y 的最大值與最小值。

(1)$x\in R$　　(2) $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$

Ans：(1)3,−1　　(2) 2,−1

[例題4] 設 y=3sin$x$+4cos$x$+10，$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，則當 tan$x$=？時，y 有最大值 M=？

Ans：$x=\frac{3}{4}$，時 M=15

[例題5] 求函數 $y=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6})-\sin x$.在下列範圍的最大值與最小值，並求此時 x 的值。(1)$0\le x\le 2\pi$　(2)$0\le x\le\pi$

分析：觀察函數 $y=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6})-\sin x$.，雖然 $y=\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{6})$與 y=sin$x$ 兩個函數週期都是 2π，不過乍看之下並不符合疊合的形式，但是透過和角公式，還是可以化成 $y=a\sin x+b\cos x$ 的形式。

Ans：(1) 當 $x=\frac{5\pi}{6}$，y=1 為最大值；當 $x=\frac{11\pi}{6}$，y=–1 為最小值。

(2) 當 $x=\frac{5\pi}{6}$，y=1 為最大值；當 $x=\frac{11\pi}{6}$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$為最小值。

[例題6] (2 倍角+疊合求極值)

設 $0\le x\le\pi$，若$f(x)=3\sin^2x+4\sqrt{3}\ \sin x\cdot\cos x-\cos^2x$，則

(1)當x=______時，$f(x)$有最大值=_______。

(2)當x=______時，$f(x)$有最小值=_______。

[答案]：(1)$\frac{\pi}{3}$，5 (2)$\frac{5\pi}{6}$，-3

[解法]：

將$f(x)=3\sin^2x+4\sqrt{3}\ \sin x\cos x-\cos^2x$

$=3\times\frac{1-\cos2x}{2}+4\sqrt{3}\ \times\frac{\sin2x}{2}\ -\frac{1+\cos2x}{2}$

$=2\sqrt{3}\ \sin2x-2\cos2x+1$

$=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x)+1$

$=4\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1$

因為 $0\le x\le\pi$，所以$-\frac{\pi}{6}\le2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{11\pi}{6}\ \Rightarrow -1\le\sin(2x-\frac{\pi}{6})\le1$

當 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$，$f(x)$有最大值 5。當 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}\ \Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$，$f(x)$有最小值$-3$。

[例題7] 設$f(\theta)=\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+1$

(1)θ為任意實數時，$f(\theta)$之最大值為______，最小值為______。

(2)$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$時，$f(\theta)$之最大值為______，最小值為______。

Ans：(1)$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，0　(2) $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，2

[解答]：先令 $t=\sin\theta+\cos\theta$ 則$t^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$　　且$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

(1)原式 $f(\theta)=\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta+1$

$=\frac{t^2-1}{2}+t+1=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2$　又$\theta\in R\Rightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$\therefore f(\theta)$之最大值為$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$，最小值為 0。

(2) $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$時$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le1$

$1\le\sqrt{2}\ \sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}\Rightarrow1\le t\le\sqrt{2}$ $\therefore f(\theta)$之最大值為$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2$，最小值為 2。

(練習2) (1)$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$　$\Rightarrow$最大值為_______，最小值為_______。

(2)$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x+1$　$\Rightarrow$最大值為_______，最小值為_______。

(3)$y=5\sin x-12\cos x$　$\Rightarrow$最大值為_______，最小值為_______。

(4) $y=-40\sin x+9\cos x$　$\Rightarrow$最大值為_______，最小值為_______。

(練習3) 試求下列各函數的最大值與最小值

(1)$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x+5$

(2)$g(x)=2\sin(x-\frac{\pi}{6})+2\cos x+5$

(3)設 $x-y=\frac{\pi}{6}$，求 $h(x)=2\cos x+2\sin y+5$ 的極大值與極小值。

Ans：(1)極大值=7，極小值=3 (2)同 1(3)同 1

(練習4) 設 $y=\sin(\frac{\pi}{6}-2x)+\cos 2x$

(1)若 $y=a\sin(2x+b)$，其中 $a>0$，$0\le b<2\pi$，求實數 a,b 之值。

(2)若 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，求 y 之最大值________與最小值________。

Ans：(1)$a=\sqrt{3}$，$b=\frac{2\pi}{3}$ (2)$\frac{3}{2}$，$-\sqrt{3}$

(練習5) 若當 $x=\alpha$ 時，$f(x)=12\cos x+5\sin x$ 有最小值，則 $\cos\alpha=$________。

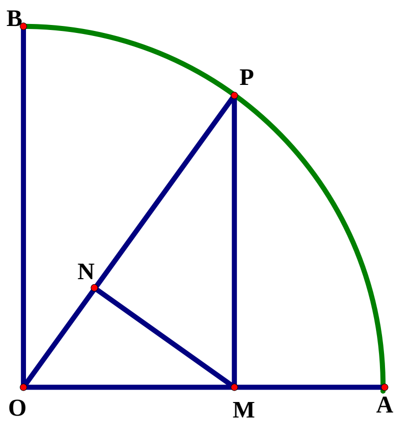
Ans：$\frac{-12}{13}$

(練習6) $y=\cos^2 x-3\cos x+3$ 之最大值為______，最小值為_______。Ans：7,1

(練習7) 設 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，則 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+2\cos^2 x$ 最大值為__________，最小值為__________。Ans：$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$；1

[例題8] 如圖，扇形OAB的中心角∠AOB=90°，半徑$\overline{OA}=\overline{OB}=1$，P為弧AB上的動點，$\overline{PM}\perp\overline{OA}$，$\overline{MN}\perp\overline{OP}$，令∠AOP=θ，$\overline{MN}+\overline{ON}=S$，

(1)請以θ表示S。(2)求S之最大值。 Ans：(1)$\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta$ (2)$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$



[例題9] (1)設 $x\in R$，試問方程式 $5=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$ 是否有解？

(2) 設 $x\in R$，$y=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$，試問 x 有解時，y 的範圍爲何？

Ans：(1)否 (2) $\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le f(x)\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$

[解法]：

(1) $5=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}\Rightarrow 5\cos x+10=3-\sin x\Rightarrow 5\cos x+\sin x=-7$

但是 $-\sqrt{26}\le 5\cos x+\sin x\le\sqrt{26}$，故方程式無解。

(2)令 $y=\dfrac{3-\sin x}{\cos x+2}$，則 $\sin x+y\cos x=3-2y$

$\because|\sin x+y\cos x|\le\sqrt{1+y^2}$，$\therefore|3-2y|\le\sqrt{1+y^2}$

$\Rightarrow(3-2y)^2\le 1+y^2\Rightarrow 3y^2-12y+8\le 0$

$\Rightarrow\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\le y\le\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$

(練習8) $y=\cos^2x-3\cos x+3$ 之最大值爲______，最小值爲_______。Ans：7,1

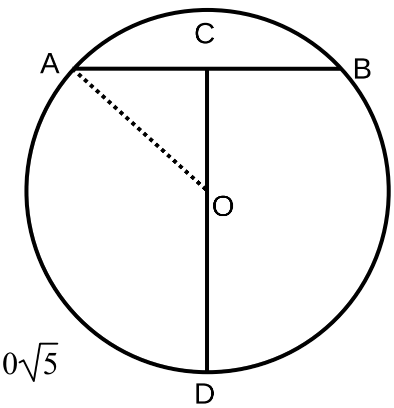
(練習9) 設 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，則 $f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+2\cos^2x$ 最大值爲__________，最小值爲__________。Ans：$\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$；1

(練習10) 某公園內有一半徑 50 公尺的圓形池塘，池塘內有美麗的荷花池與錦鯉。爲了方便遊客觀賞，並使整體景觀更爲雅緻，打算在池塘上建造一座“T”字型木橋(如右圖)。

試問這座木橋總長 $\overline{AB}+\overline{CD}$ 最長有多長？

此時 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 兩段木橋的長度各爲多少？

Ans：總長 $50+50\sqrt{5}$ 公尺，此時 $\overline{AB}=40\sqrt{5}$，$\overline{CD}=50+10\sqrt{5}$



(練習11) 設 $0\le x\le 2\pi$，$f(x)=1+\sin x+\cos x-\sin x\cos x$，則下列何者爲真？

(A) $f(x)$ 最大值爲 2 (B) $f(x)$ 最小值爲 $1-\sqrt{2}$ (C) $x=0,\frac{\pi}{2},2\pi$ 時 $f(x)$ 有最大值

(D) $x=225°$ 時，$f(x)$ 之值爲最小值 (E) $f(x)$ 之最大值與最小值之和爲 $\frac{5}{2}-\sqrt{2}$

Ans：(A)(C)(D)(E)

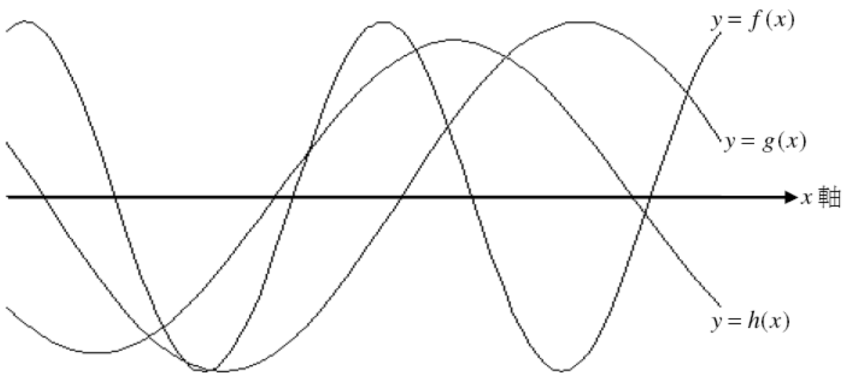
(練習12)設 $x\in R$，$f(x)=\dfrac{1+\sin x}{3+\cos x}$，試求 $f(x)$ 的範圍。Ans：$0\le f(x)\le\dfrac{3}{4}$

綜合練習

(1) 求$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ}-\dfrac{1}{\cos 15^\circ}$ 的值。

(2) 設 270°<A<360°且$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin 2012^\circ$，若 $A=m^\circ$，試求 m 的值。

(3) 函數 $y=3\sin x-\cos x$、$y=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$y=2\sin x+2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如下圖：



試問圖中的圖形 $y=f(x)$、$y=g(x)$、$y=h(x)$所代表的函數應爲下列哪一個選項？
(1) $f(x)=3\sin x-\cos x$、$g(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$h(x)=2\sin x+2\cos x$
(2) $f(x)=3\sin x-\cos x$、$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$g(x)=2\sin x+2\cos x$
(3) $g(x)=3\sin x-\cos x$、$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$h(x)=2\sin x+2\cos x$
(4) $g(x)=3\sin x-\cos x$、$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$f(x)=2\sin x+2\cos x$
(5) $h(x)=3\sin x-\cos x$、$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$、$g(x)=2\sin x+2\cos x$

(4) 關於函數 $y=f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x)$的圖形，
下列敘述那些是正確的?
(A)$y=f(x)$的週期爲 π 。(B) $y=f(x)$的振幅爲$\sqrt{2}$ 。
(C)$y=f(x)$的圖形與 y 軸的交點爲$(0,\dfrac{1}{2})$。
(D)$y=f(x)$的圖形與 x 軸有無限多個交點。
(E)$y=f(x)$的圖形對稱於原點。

(5) 關於函數 $y=\sin x-\cos x$ 之圖形(A)週期爲 2π (B)週期爲π (C) y 之最大值爲 2 (D) y 之最大值爲$\sqrt{2}$ (E)對稱於原點。

(6) 下列哪些函數的最小正週期爲 π ？____________。(92 學科能力測驗)
(1)$\sin x+\cos x$ (2)$\sin x-\cos x$ (3)$|\sin x+\cos x|$ (4)$|\sin x-\cos x|$ (5)$|\sin x|+|\cos x|$

(7) $y=\cos x-\sqrt{3}\sin x$，$0\le x\le\pi$ ，在 $x=\alpha$時，有最大值 M，在 $x=\beta$時，有最小值 m，求 α,β,M,m。

(8) 下列各題經過變換後，求其最大值與最小值。

(a)求 $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})$之最大值與最小值。

(b)求 $y=2\sin x+2\sin(x+\frac{\pi}{2})$之最大值與最小值。

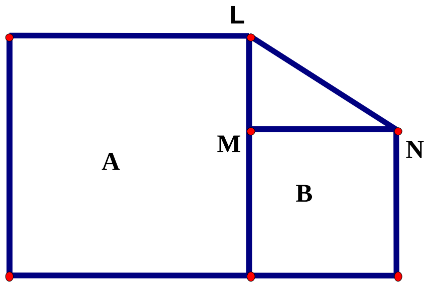
(9) 函數 $y=12\sin x-5\cos x$，x 的範圍如下，分別求 y 的最大值與最小值。

(a)$x\in\mathrm{R}$　　(b)$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

(10) 設$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{7\pi}{6}$，$y=\cos^2x-4\sin x-3$，

則(a)當 $x=$__________時，y 有最小值為__________。

(b)當 $x=$__________時，y 有最大值為__________。



(11) 設$\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，解$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$。

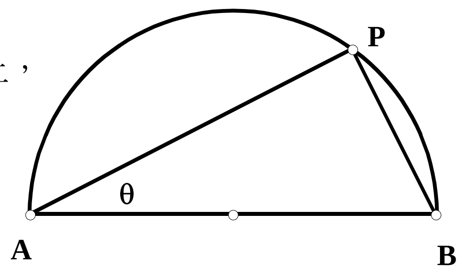
(12) 如右圖，正方形 A 與 B 的面積和為 1，

(a)設正方形 A 與 B 的邊長分別為 $\sin\theta$、$\cos\theta$，

請利用 $\sin\theta$與 $\cos\theta$來表示ΔMNL 的面積。

(b)請求出ΔMNL 的面積的最大值。

(13) 求$y=3\sin^2x+4\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2x$　其中$\frac{\pi}{12}\leq x\leq\frac{3}{4}\pi$，求$y$的最大值與最小值，並說明此時$x$值為何？。



(14) 如右圖，以$\overline{AB}$為直徑做一圓，且$\overline{AB}=2$，P 點在半圓上，設∠PAB=θ，

(a)試以θ表示 $3\overline{AP}+4\overline{BP}$

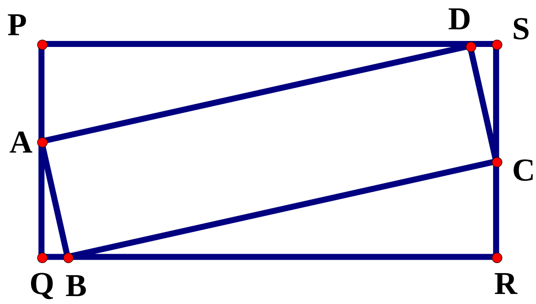
(b)試求 $3\overline{AP}+4\overline{BP}$的最大值。

(15) 半徑為 r 的圓內接矩形，令其對角線夾角為θ　$(0<\theta\leq\frac{\pi}{2})$

(a)試以 r 、θ表示矩形的周長？　(b)試求周長的最大值？

(16) 如右圖，矩形 ABCD 的四個頂點分別在矩形 PQRS 的四個邊上，若$\overline{AB}=3$，

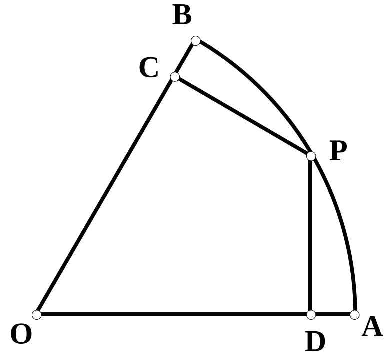
$\overline{BC}=7$，且$\overline{AB}$與$\overline{AQ}$的夾角為α，則當α等於多少度時，矩形 PQRS 的周長最大



進階問題

(17) 求 $y=\dfrac{1+\sin x}{3+\cos x}$的範圍。

(18) 已知扇形 OAB 的圓心角爲$\dfrac{\pi}{3}$，半徑爲 1，P 爲 AB 弧上的動點，$\overline{PC}\perp\overline{OA}$於 C 點，$\overline{PD}\perp\overline{OB}$於 D 點，試求四邊形 PCOD 的最大面積。



(19) 設 $x+y=\dfrac{2\pi}{3}$，求 $\sin x+2\sin y$ 的最大值爲何？

(20) 斜邊長爲 6 的直角三角形中，求周長的最大值？