

第十七單元 倍角公式

(甲)倍角公式

(1)二倍角公式：

由和角公式： $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ ，令 $\alpha = \beta = \theta$ ，可得

(a) $\sin 2\theta = 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$

由和角公式： $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ ，令 $\alpha = \beta = \theta$ ，可得

(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

由和角公式： $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ ，令 $\alpha = \beta = \theta$ ，可得

(c) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

[注意]：根據公式(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ ，可知已知 θ 的正弦值、餘弦值，可得 2θ 的餘弦值。另一方面，若已知 α 的餘弦值，就可得 $\frac{\alpha}{2}$ 的正弦值、餘弦值。

例如：

已知 $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ，請求出 $\cos 2\theta = ?$ **[解法]：**根據 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2(\frac{2}{3})^2 - 1 = \frac{-1}{9}$ ，已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ ，試求 $\cos\frac{\alpha}{2} = ?$ 根據(b)令 $2\theta = \alpha$ ，可得 $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ ，所以 $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}}$ 。

結論：我們整理倍角公式如下：

(a) $\sin 2\theta = 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$

(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

(c) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

(d) $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

(e) $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ ， $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

(2)以正切表示二倍角

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

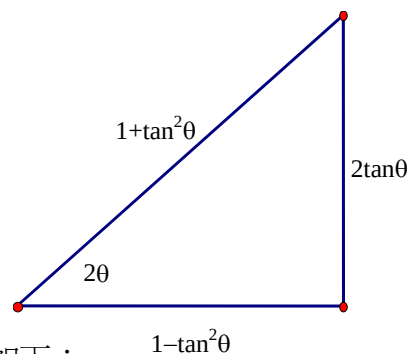
證明：

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cos^2\theta = 2\tan\theta\left(\frac{1}{\sec^2\theta}\right) = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

證明：

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2}{\sec^2\theta} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\theta} - 1 = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$



結論：利用 $\tan\theta$ 可以將 $\sin 2\theta$ ， $\cos 2\theta$ ， $\tan 2\theta$ 表示出來，整理如下：

$$(a) \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \quad (b) \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \quad (c) \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

[討論]：

利用 $\tan\theta$ 來表示 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ 、 $\tan 2\theta$ ，主要是將 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 、 $\tan\theta$ 表示成分式的形式，

即 $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ ， $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ， $\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ ，其中 $t = \tan\frac{\theta}{2}$ 為任意實數，可以應用於求某些三角函數的積分。

(3)三倍角公式

$$(a) \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

證明：

$$\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta) = \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta$$

$$= \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + \cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos^2\theta$$

$$= \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$(b) \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

證明：

$$\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$$

$$= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

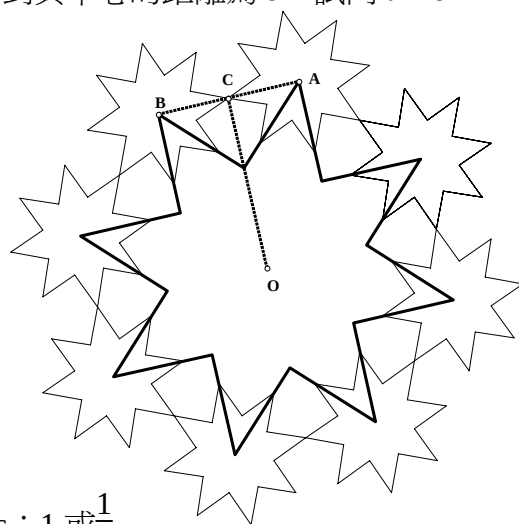
[例題1] 已知 $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ 且 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ ，求

$$(1)\cos 2\theta, \tan 2\theta \quad (2)\sin \frac{\theta}{2}, \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Ans : } (1)\cos 2\theta = \frac{7}{25}, \tan 2\theta = -\frac{24}{7}, (2)\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \tan \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{3}$$

[例題2] 如右圖，一個大的正八角星形的頂點為周圍八個全等的小正八角星形中心，相鄰的兩個小八角星有一個共同頂點。觀察圖中虛線部分，設小八角星頂點 C 到其中心 A 的距離為 a ，大八角星頂點 A 到其中心的距離為 b 。試問 $a : b$

$$\text{的比值為何？} \quad \text{Ans : } \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$



[例題3] 若 $3\sin 2\theta + 2\cos 2\theta = 3$ ，求 $\tan\theta$ 之值。 Ans : 1 或 $\frac{1}{5}$

[例題4] 設 $\sin 2\theta = \frac{-3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, 試求下列之值：

(1) $\sin\theta - \cos\theta$ (2) $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ (2) $\tan\theta + \cot\theta$ (3) $\sin^6\theta + \cos^6\theta$

Ans : (1) $\sqrt{\frac{8}{5}}$ (2) $\frac{-4}{5}$ (2) $\frac{-10}{3}$ (3) $\frac{73}{100}$

結論：

底下是一些有用的公式：

(a) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (b) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

(c) $\sin^4\theta + \cos^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

(d) $\sin^6\theta + \cos^6\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

(e) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2}{\sin 2\theta}$

(f) $(\sin\theta \pm \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta \pm 2\sin\theta\cos\theta = 1 \pm \sin 2\theta$

(練習1) 設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 且 $\sin\theta = \frac{3}{5}$, 求 $\sin 2\theta$ 及 $\sin \frac{\theta}{2}$ 、 $\sin 3\theta$ 的值。

Ans : $\sin 2\theta = \frac{-24}{25}$, $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 3\theta = \frac{117}{125}$

(練習2) 試求 $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{8}$, $\tan \frac{\pi}{8}$ 之值。 Ans : $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $-1+\sqrt{2}$

(練習3) $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 且 $\tan\theta = \frac{3}{4}$, 則 $\sin \frac{\theta}{2} = \underline{\hspace{1cm}}$, $\cos \frac{\theta}{2} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。 Ans : $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{-1}{\sqrt{10}}$

(練習4) 設 $\cos 2\theta = t$, 試以 t 表示 $4(\cos^6\theta - \sin^6\theta) = ?$ Ans : $t^3 - 3t$

(練習5) 設 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, 且 $3\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta = 0$, 則 $\sin 2\theta + \cos 2\theta = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

Ans : $\frac{-7}{13}$

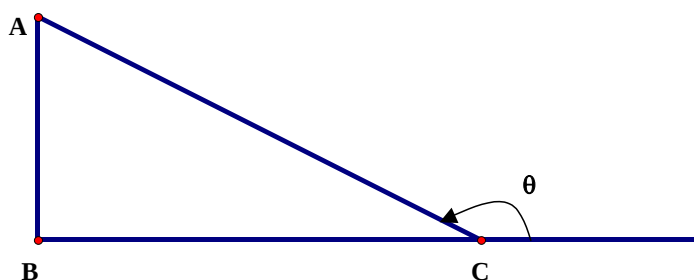
(練習6) 試求 $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$ 的值。Ans : $\frac{3}{2}$

(練習7) $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{4}$,

則(1) $\sin 2\theta = \underline{\hspace{1cm}}$ (2) $\cos 2\theta = \underline{\hspace{1cm}}$, (3) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

Ans : (1) $\frac{-15}{16}$ (2) $\frac{\sqrt{31}}{16}$ (3) $\frac{47}{128}$

(練習8) 如圖, θ 為一有向角, $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, 求 $\sin 2\theta = ?$ Ans : $\frac{-24}{25}$



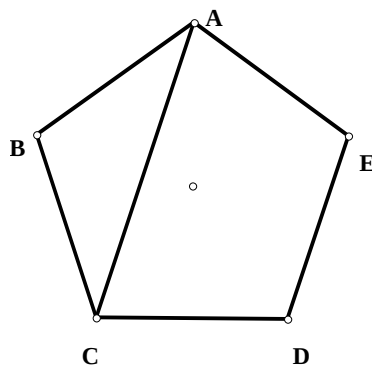
(乙)倍角公式的應用

[例題5] (1)利用倍角公式, 求出 $\sin 18^\circ$ 之值。

(2)求 $\sin 54^\circ$ 之值。

(3) 如圖, 假設正五邊形的邊長為 a , 請求出對角線 $\overline{AC}$ 的長度。

Ans : (1) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ 註: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 稱為黃金比例數



[例題6] 求在 $0 < x < 2\pi$ 的範圍內， $y = \sin x$ 與 $y = \sin 2x$ 兩圖形的交點坐標。

$$\text{Ans : } (\pi, 0) 、 \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right) 、 \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

[例題7] 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{BC}=3$ 且 $\angle A=2\angle C$ ，則 $\overline{AC}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\text{Ans : } \frac{5}{2} \quad (2010 \text{ 學科能力測驗})$$

(練習9) 利用 $\sin 18^\circ$ 的值求出 $\cos 36^\circ$ 的值。Ans : $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(練習10) 試求在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍內， $y = \cos x$ 與 $y = \cos 2x$ 兩圖形的交點坐標。

$$\text{Ans : } (0, 1) 、 \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{2}\right) 、 \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{1}{2}\right) 、 (2\pi, 1)$$

(練習11) 設 $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ ，則 $f(x)$ 被 $x - \sin \frac{\pi}{9}$ 除後所得的餘式=_____。

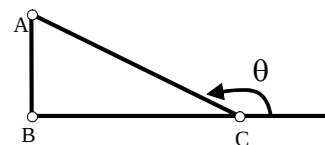
$$\text{Ans : } 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{提示：利用三倍角公式與餘式定理})$$

(練習12) 求下列的值：

$$(1) \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \quad (2) \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} \quad \text{Ans : } (1) \frac{1}{8} \quad (2) \frac{-1}{8}$$

綜合練習

(1) 如圖， θ 為一個有向角， $\overline{AB}=2$ ， $\overline{BC}=5$ ，則 $\sin 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



(2) 設 $\cos\theta = \frac{3}{5}$ 且 $\frac{3\pi}{5} < \theta < 2\pi$ ，求 (a) $\sin 2\theta$ (b) $\sin 3\theta$ (c) $\cos \frac{\theta}{2}$

(3) 設 $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$ ， $\frac{3\pi}{2} \leq 2\alpha \leq 2\pi$ ，求

(a) $\cos \alpha$ (b) $\tan \alpha$ (c) $\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \sin^4 \frac{\alpha}{2}$ 之值

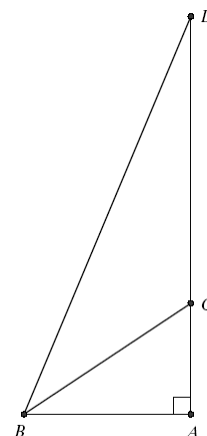
(4) 設 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ ， $\sin \beta = \frac{4}{5}$ ，請求出

(a) $\cos(\alpha - \beta)$ (b) $\sin \frac{2\alpha - \beta}{2}$ (c) $\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$ 。

(5) 如右圖，直角三角形 ABD 中， $\angle A$ 為直角，

C 為 $\overline{AD}$ 邊上的點。已知 $\overline{BC}=6$ ， $\overline{AB}=5$ ， $\angle ABD=2\angle ABC$ ，

則 $\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2010 學科能力測驗)



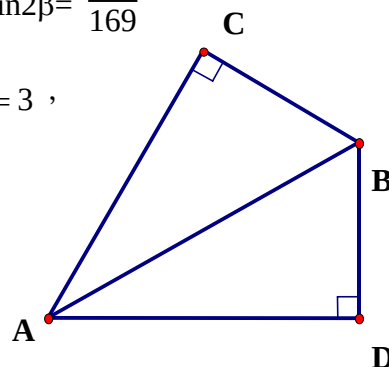
(6) 下列何者為 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ 之根？

(A) $\sin 10^\circ$ (B) $\sin 30^\circ$ (C) $\sin 130^\circ$ (D) $\sin 160^\circ$ (E) $\sin 250^\circ$ 。

(7) 設 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ，若 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{5}{13}$ 則

(A) $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ (B) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{-16}{63}$ (C) $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (D) $\sin 2\beta = \frac{120}{169}$

(8) 如右圖，兩個全等的直角三角形中， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{BD} = 3$ ，試求 C 點到直線 AD 的最短距離？



(9) 求 $y = 2\sin^2 x$ 的週期。

(10) 化簡 $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(11) 化簡 $-\cos^2 \theta + \cos^2(\frac{\pi}{6} + \theta) + \cos^2(\frac{\pi}{6} - \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(12) 若 $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，請計算 $\sin 2(x - \frac{\pi}{4}) = ?$

(13) 設 $\tan \frac{\theta}{2} = x$ ，試以 x 表示 $\cos 2\theta$ 。

(14) 設 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ ，求 $\tan\frac{\theta}{2}$ 之值。

(15) 若 $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ， $\sin 2\theta = a$ ，則 $\sin\theta - \cos\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(16) 設 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ，試化簡 $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}$ 。

(17) 設 $x^2 - (\tan\theta + \cot\theta)x + 1 = 0$ 有一根 $2 + \sqrt{3}$ ，求 $\sin 2\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(18) $2x^2 + ax - 1 = 0$ 有一根為 $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ$ ，求 a 的值。

(19) 以 $x - \cos 40^\circ$ 除 $f(x) = 3x - 4x^3$ 之餘式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(20) 化簡求 $\cos\frac{\pi}{15} \cos\frac{2\pi}{15} \cos\frac{4\pi}{15} \cos\frac{8\pi}{15}$ 之積。

(提示：令 $A = \cos\frac{\pi}{15} \cos\frac{2\pi}{15} \cos\frac{4\pi}{15} \cos\frac{8\pi}{15}$ ，同乘 $\sin\frac{\pi}{15}$ ，再利用 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 的公式)。

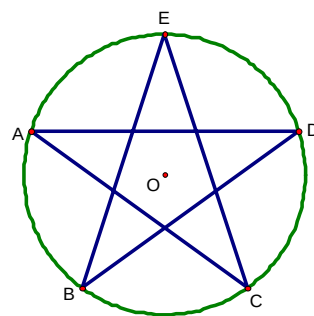
(21) (a) 試求 $\cos\frac{\pi}{16}$ ； $\sin\frac{\pi}{16}$ ？

(b) 試求單位圓內接正十六邊形的面積及周長？

(22) 設 $\pi < x < 2\pi$ ，化簡 $\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}$ 。

(23) 已知正五角星(即 $ABCDE$ 為正五邊形)內接於一圓 O ，如右圖所示。若 $\overline{AC} = 1$ ，則圓 O 的半徑長 = ?。

$$[\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}]$$



(24) 等腰三角形的頂角為 20° ，腰長為 1，底長為 $2b$ ，試求 $8b^3 - 6b$ 之值為何？

(25) 四邊形 $ABCD$ 內接於圓 O ，圓 O 的半徑為 $\frac{65}{8}$ ，已知四邊形的周長為 44，

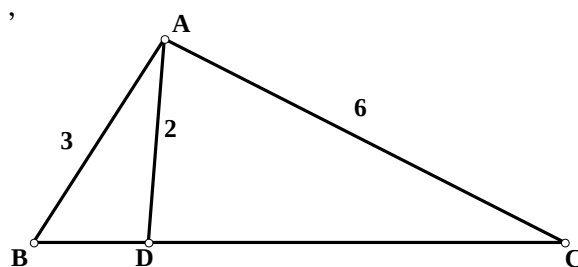
$\overline{BC} = \overline{CD} = 13$ ，試問 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$ 的長度為何？

(26) 已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 和 b 、 c 兩邊，試求 $\angle A$ 的內角平分線段長。

(27) 在右圖 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AD} = 2$ ，且 $\angle BAD = \theta$ ， $\angle DAC = 2\theta$ ：

(a) 利用 $\triangle ABC$ 之面積 = $\triangle ABD$ 面積 + $\triangle ADC$ 面積，以 θ 之三角函數列出方程式。

(b) 試利用(a)的結果求 $\cos\theta$ 之值。



進階問題

(28) 設實數 x 滿足 $\sin^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$

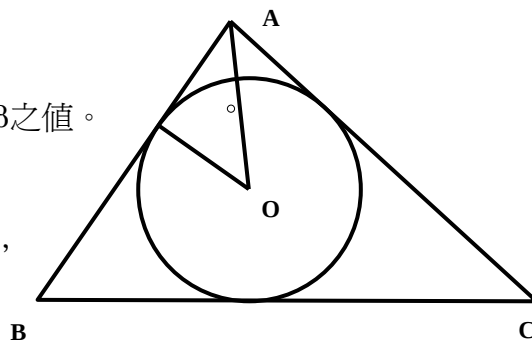
(a) 求 $\sin^2 x \cos^2 x$ 的值。

(b) 設 $0 \leq x \leq \pi$, 試求 $x = ?$

(29) 設 $\sin \alpha + \sin \beta = 1$, $\cos \alpha + \cos \beta = 0$, 求 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta$ 之值。

(30) $\triangle ABC$ 中, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $s = \frac{a+b+c}{2}$,

試證: $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$



(31) 設 α, β 為 $a \cos x + b \sin x + c = 0$ 的相異二根, $a \neq 0$, $-\pi < \alpha, \beta < \pi$

(a) 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 試將上述方程式化成 t 的方程式。

(b) 求 x 在 $-\pi$ 與 π 之間有二實根的條件。(c) 求 $\tan \frac{\alpha+\beta}{2}$ 之值。

(32) 平行四邊形 $ABCD$ 中, $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$,
且 $a \neq b$, $\angle A = \alpha$, 其內角平分線圍成一矩形,
試以 a, b, α 表示此矩形的面積。

