第十六單元　和角公式

(甲)和角公式

(1)公式一：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

證明：

先做一單位圓，如右圖其中A(cosα，sinα)、B(cosβ，sinβ)，

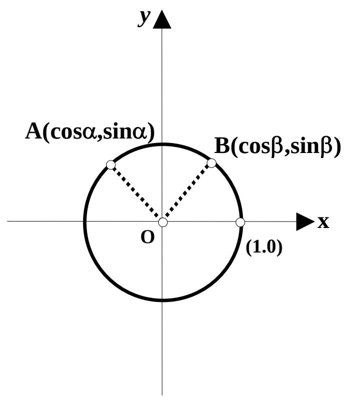
設O、A、B三點不共線，令∠AOB=α−β，

因爲$\overline{AB}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)$......①

利用餘弦定理：$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos(\alpha-\beta)$

所以$\overline{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$...............................②

由① ②可得$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$



討論：

(a)如果 A,O,B 共線上述的結果會成立嗎？

(b)α−β不再[0,π]的範圍內時，上述的結果會成立嗎？

(2)公式二：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

證明：

(3)公式三：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

證明：

(4)公式四：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

證明：

(5)公式五：$\mathbf{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$

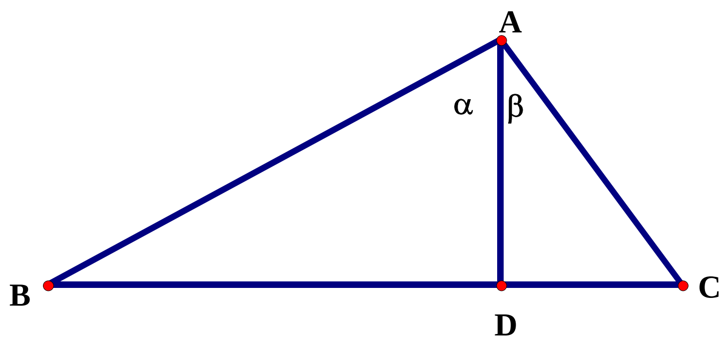
證明：

(6)公式六：$\mathbf{\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$

證明：

和角公式的精神：
已知兩個角度的三角函數，即可得兩個角度的和或差的三角函數。

(練習1) (1)如圖，設 $0°<\beta\leq\alpha<90°$，其中$\overline{AD}$爲$\overline{BC}$邊上的高，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$
利用ΔABD、ΔCAD、ΔABC 的面積關係來證明：
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$



(2) 推導其他的和角公式。

[例題1] 試求 cos15°，sin105°，tan75°之值。
Ans：$\cos15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin105°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan75°=2+\sqrt{3}$

[例題2] 設$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{-12}{13}$，則

(1)$\sin(\alpha-\beta)$=_____。(2)$\cos(\alpha-\beta)$=_______。(3)$\alpha-\beta$爲第____象限角。

Ans：(1)$\frac{-56}{65}$ (2)$\frac{33}{65}$ (3)四

(練習2) 設$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，且$\cos\alpha=\frac{-3}{5}$，$\sin\beta=\frac{-12}{13}$，試求

(1)$\sin(\alpha+\beta)$ =_______；(2)$\cos(\alpha-\beta)$=_________。

(練習3) 計算下列各小題：

(1)$\sin195°$ (2)$\cos75°$ (3)$\tan15°$ Ans ： (1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3)$2-\sqrt{3}$

(練習4)試化簡下列各小題：

(1) $\sin\frac{7\pi}{9}\cos\frac{23\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{9}\sin\frac{23\pi}{36}$ (2)$\sin68°\cos23°-\sin23°\cos68°$

(3)$\cos44°\sin164°-\sin224°\cos344°$=？

(4) 求 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos(\alpha-\frac{\pi}{3})+\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$=？

Ans：(1)$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4)0

(練習5)若$\tan\alpha$，$\tan\beta$爲$x^2+9x-4=0$ 之二根，試求

(1)$\tan(\alpha+\beta)$=？ (2)$\sin^2(\alpha+\beta)+9\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-4\cos^2(\alpha+\beta)$=？

Ans：(1)$\frac{-9}{5}$ (2)-4

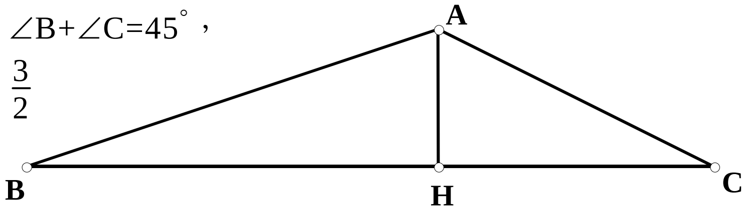
(練習6) 如右圖，$\overline{AH}\perp\overline{BC}$且$\overline{BC}=5\overline{AH}$，$\angle B+\angle C=45^{\circ}$，

若$\overline{BH}>\overline{HC}$，則$\frac{BH}{HC}$=？ Ans：$\frac{3}{2}$

[提示：令$BH=x$，$HC=1$，

則$AH=\frac{1}{5}(x+1)$，

再利用$\tan(B+C)=\tan45^{\circ}=1$，求$x$的值。]



(練習7) 設 $\tan\alpha=1$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，試求 $\tan\beta$之值。 Ans：$2-\sqrt{3}$

(練習8) 試證：$\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta}$ ，$\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

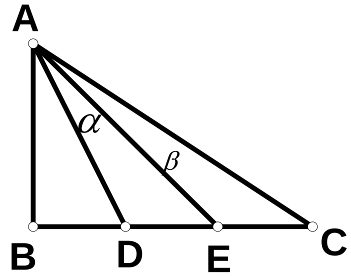
(練習9) 試求下列各值：
(1)$\tan12^\circ+\tan48^\circ+\sqrt{3}\tan12^\circ\tan48^\circ=$_____。[提示：考慮$\tan(12^\circ+48^\circ)$]
(2)$\dfrac{\tan227^\circ-\tan287^\circ}{1-\tan133^\circ\tan107^\circ}=$______。
(3)$\sqrt{3}\cdot\cot20^\circ\cot40^\circ-\cot20^\circ-\cot40^\circ=$_____。[提示：考慮$\cot(40^\circ+20^\circ)$]
Ans：(1)$\sqrt{3}$ (2)$-\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{3}$

(乙)和角公式的應用

(1)善用和角公式的精神：
已知兩個角度的三角函數，即可得兩個角度的和或差的三角函數。

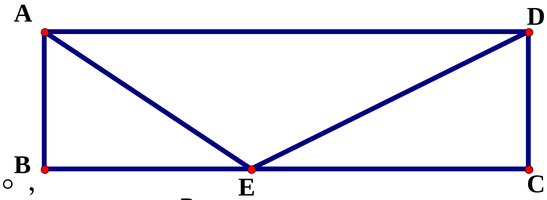
[例題3] 在ΔABC中，已知$\overline{AB}=5$，$\cos\angle ABC=\dfrac{-3}{5}$ ，且其外接圓半徑爲$\dfrac{13}{2}$，
則 $\sin\angle BAC=$？ Ans：$\dfrac{33}{65}$ (2010 指定甲)

[例題4] 如右圖，$\angle ABC=90^\circ$，$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$，$\angle DAE=\alpha$，$\angle EAC=\beta$，則
(1)$\tan\alpha=$？ (2)$\cos\beta=$？
Ans：(1)$\dfrac{1}{3}$ (2)$\dfrac{5\sqrt{26}}{26}$



(練習10)矩形 ABCD 中，若$\overline{AB}$=2，$\overline{BC}$=7，在$\overline{BC}$上取一點 E，使得$\overline{BE}$=3，

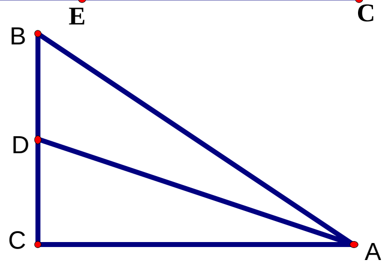
試求 $\tan\angle AED$=__________。Ans：$\frac{-17}{6}$



(練習11)右圖是一個直角三角形 ABC，其中$\angle C=90°$，

$\angle BAD=\theta$，若$\overline{CD}=\overline{BD}=1$，$\overline{AC}=3$，則 $\tan\theta$=？

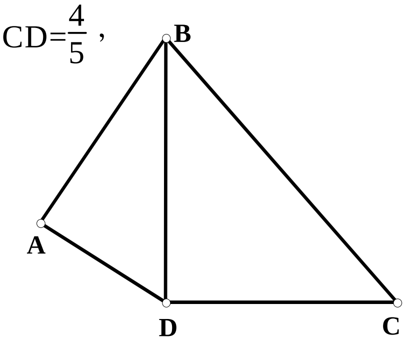
(A)$\frac{3}{11}$ (B)$\frac{1}{7}$ (C)$\frac{2}{9}$ (D)$\frac{1}{9}$ (E)$\frac{1}{3}$。Ans：(A)



(練習12)已知四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}$=16，$\overline{BC}$=25，$\overline{CD}$=15，

$\angle ABC$ 及$\angle BCD$ 皆爲銳角，而 $\sin\angle ABC=\frac{24}{25}$，$\sin\angle BCD=\frac{4}{5}$，

求(1)$\overline{BD}$=？ (2)$\overline{AD}$=？Ans：(1)20 (2)12



(練習13)ΔABC 爲等腰直角三角形，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，D,E 將$\overline{BC}$分成三等分，試求

$\tan\angle DAE$=______。Ans：$\frac{3}{11}$

[提示將$\angle DAE$ 分成兩個角的差，即$\angle DAE=\angle CAE-\angle CAD$，已知 $\tan\angle CAE=\frac{2}{3}$，$\tan\angle CAD=\frac{1}{3}$，可得 $\tan\angle DAE$]

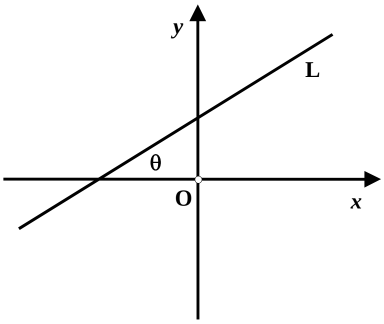
(2)兩直線的夾角

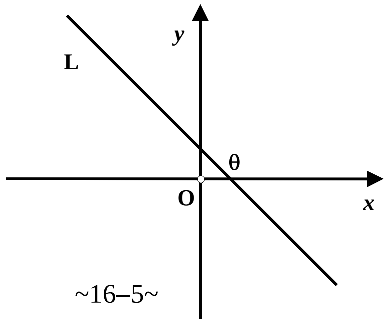
(a)若直線 L 與 x 軸正向的夾角爲θ，θ稱爲直線 L 的斜角，特別當直線 L 與 x 軸重合，直線 L 的斜角定義成 0，直線 L 與 x 軸平行直線 L 的斜角定義成π。

(b)當直線 L 的斜角爲$\theta(\theta\neq\frac{\pi}{2})$，則直線 L 的斜率爲 $\tan\theta$。

(b)若兩直線的斜率分別爲m_1,m_2且兩直線夾角爲θ，

則$\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$。





[例題5] (1)設兩直線 $x-2y+3=0$ 與 $3x+y-1=0$ 的夾角爲 θ，則 $\sin\theta=$？
(2)過點 $(1,3)$ 且與直線 $y=2x+6$ 的夾角爲 45° 的直線方程式爲？
Ans：(1)$\frac{7\sqrt{2}}{10}$ (2) $y=-3(x+1)$ 或 $y=\frac{1}{3}(x-1)+3$
[解法]：
(1)兩直線斜率爲 $\frac{1}{2}$，-3，則 $\tan\theta=\pm\dfrac{\frac{1}{2}-(-3)}{1+\frac{1}{2}\cdot(-3)}=\pm7$ 故 $\sin\theta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$
(2)令直線斜率爲 m，則 $\tan45°=\left|\dfrac{2-m}{1+2m}\right|$ $\Rightarrow|1+2m|=|2-m|$
平方可得 $3m^2+8m-3=0$，則 $m=-3$ 或 $\frac{1}{3}$
故直線爲 $y=-3(x+1)$ 或 $y=\frac{1}{3}(x-1)+3$

(練習14) (1)設兩直線 $x+y+3=0$ 與 $\sqrt{3}x+y-1=0$ 的夾角爲 θ，則 $\tan\theta=$？
(2)求過點 $(\sqrt{3},2)$ 與直線 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 之夾角爲 30°的直線方程式。
Ans：(1)$\pm(2-\sqrt{3})$ (2)$y=2$ 或 $\sqrt{3}x-y=1$

(3)和差與積的互化公式(補充教材)
(a)積化爲和差
由正餘弦的和角公式：
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ……①
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ……②
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$……..③
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$……..④

可得出：

① +② $\Rightarrow 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$
① −② $\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$
③ +④ $\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$
③ −④ $\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

我們將其整理成：

$\boxed{\textbf{(a) } 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$

$\boxed{\textbf{(b) } 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$

$\boxed{\mathbf{(c)\ 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}}$

$\boxed{\mathbf{(d)\ 2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}}$

例如：
將下列三角函數的乘積，化成三角函數的和差

$\sin82.5^\circ\cos37.5^\circ=\frac{1}{2}(\sin120^\circ+\sin45^\circ)=\frac{1}{2}[\sin120^\circ-\sin(-45^\circ)]$

$\cos82.5^\circ\sin37.5^\circ=\frac{1}{2}(\sin120^\circ-\sin45^\circ)=\frac{1}{2}[\sin120^\circ+\sin(-45^\circ)]$

cos與sin相乘如果sinθ的角度比cos的角度大，適合用公式(a)
cos與sin相乘如果sinθ的角度比cos的角度小，適合用公式(b)

$\cos23^\circ\cos37^\circ=\frac{1}{2}[\cos60^\circ+\cos(-14^\circ)]=\frac{1}{2}(\cos60^\circ+\cos14^\circ)$

$\sin23^\circ\sin37^\circ=\frac{1}{2}[\cos(-14^\circ)-\cos60^\circ]=\frac{1}{2}[\cos14^\circ-\cos60^\circ]$

cos與cos相乘 一定是cos+cos角度兩個相加、兩個相減。
sin與sin相乘 一定是cos−cos角度(兩個相減)減去(兩個相加)。

(b)和差化爲積

想法：任何兩角x,y一定可以找到二數α,β使得$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$，此時$\alpha=\frac{x+y}{2}$ 、$\beta=\frac{x-y}{2}$，代入積化爲和的關係式中，可得

$\boxed{\mathbf{(a)}\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$

$\boxed{\mathbf{(b)}\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$

$\boxed{\mathbf{(c)}\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}$

$\boxed{\mathbf{(d)}\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$ **(注意此式中有負號)**

例如：
$\sin110^\circ+\sin10^\circ=2\sin60^\circ\cos50^\circ$

$\sin 110^\circ - \sin 10^\circ = 2\cos 60^\circ \sin 50^\circ$

$\cos 110^\circ + \cos 10^\circ = 2\cos 60^\circ \cos 50^\circ$

$\cos 110^\circ - \cos 10^\circ = -2\sin 60^\circ \sin 50^\circ$

上面的公式，角度的原則都是(前+後)/2，(前−後)/2。

[例題6] 化簡下列各式：

(1)$\cos 65^\circ \cdot \sin 110^\circ + \cos 25^\circ \cdot \sin 20^\circ$ (2)$\sin 37.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$ (3)$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

Ans：(1)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2)$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ (3)$\frac{\sqrt{3}}{8}$

[例題7] 化簡下列兩式：

(1)$\sin 10^\circ - \sin 110^\circ + \sin 130^\circ$ (2) $\sin^2\theta + \sin^2(\frac{\pi}{3}+\theta) + \sin^2(\frac{\pi}{3}-\theta)$

Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{2}$

(練習15) 化簡下列各式：

(1) $\sin 100^\circ \sin 140^\circ \sin 160^\circ$

(2)$\cos 100^\circ \cos 120^\circ \cos 140^\circ \cos 160^\circ \cos 180^\circ$

(3) $\sin 100^\circ \sin(-160^\circ) + \cos 200^\circ \cos(-280^\circ)$

(4) $\cos 55^\circ \cos 65^\circ + \cos 65^\circ \cos 175^\circ + \cos 175^\circ \cos 55^\circ$

Ans：(1)$\frac{\sqrt{3}}{8}$ (2)$\frac{-1}{16}$ (3) $\frac{-1}{2}$ (4) $\frac{-3}{4}$

(練習16) 化簡下列各式：

$(1)\cos 80^{\circ}+\cos 40^{\circ}-\cos 20^{\circ}$ $(2)\cos^2\theta+\cos^2(\frac{\pi}{3}+\theta)+\cos^2(\frac{\pi}{3}-\theta)$

$(3)\sin 5^{\circ}+\sin 125^{\circ}-\sin 115^{\circ}$ $(4)\cos 10^{\circ}+\cos 110^{\circ}+\cos 130^{\circ}$

Ans：(1)0 (2)$\frac{3}{2}$ (3)0 (4)0

(練習17) 求$\frac{\sin 55^{\circ}\sin 35^{\circ}}{\cos 80^{\circ}+\cos 40^{\circ}}$之值。 Ans：$\frac{1}{2}$

(練習18) 設 $\sin(x+y)=\frac{33}{65}$，$\sin(x-y)=\frac{-63}{65}$，求 $\cos x\sin y$ 之值。Ans：$\frac{48}{65}$

(練習19)$\theta=\frac{\pi}{8}$，求$\frac{\sin 5\theta+\sin\theta}{\cos 5\theta+\cos\theta}$之值。Ans：$\sqrt{2}+1$

綜合練習

(1) ΔABC 爲邊長爲 5 的正三角形，P 點在三角形內部，若線段長度$\overline{PB}$=4 且$\overline{PC}$=3，則 $\cos\angle ABP$=____________(四捨五入到小數點後第二位，$\sqrt{2}$的近似值是 1.414，$\sqrt{3}$的近似值是 1.732) (2009 指定甲)

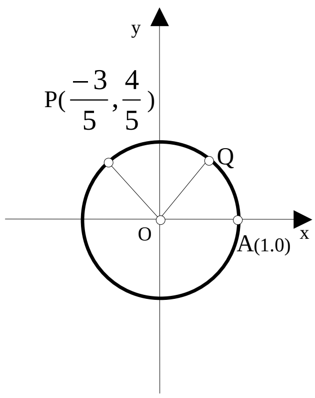
(2) 設 $\sec\alpha=\frac{5}{3}$，$\cot\beta=\frac{8}{15}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$=？

(3) 化簡下列兩小題：

(a)$\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\cos(\theta-\frac{\pi}{3})-\cos(\theta+\frac{\pi}{3})\sin(\theta-\frac{\pi}{3})$=？

(b)$\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}$=？

(4) 如右圖：設 A(1,0)，Q(m,n)，P($\frac{-3}{5},\frac{4}{5}$)均在單位圓上，$\angle QOP=\frac{\pi}{3}$，算出點 Q 的坐標。



(5) 設 $\sin84^\circ=a$，$\cos63^\circ=b$，則

(A) $\cos21^\circ=b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$

(B) $\sin21^\circ=ab-\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$

(C) $\sin147^\circ=ab+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$

(D) $\cos147^\circ=b\sqrt{1-b^2}-a\sqrt{1-a^2}$ 。

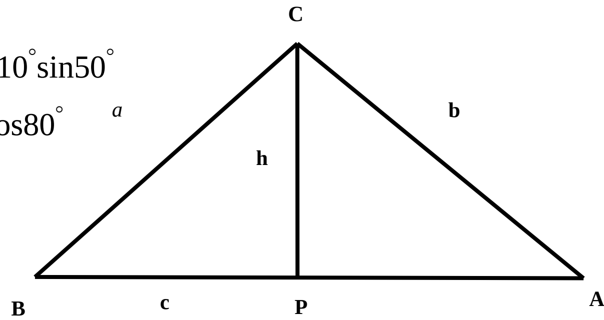
(6) 令$\sin84^\circ=a$，$\cos63^\circ=b$，試以a,b 表示$\sin147^\circ$及$\cos21^\circ$。

(7) 求$\frac{2\sin80^\circ-\cos70^\circ}{\cos20^\circ}$=？

(8) 化簡下列各式：

(a)$2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$ (b)$\sin20^\circ\cos70^\circ+\sin10^\circ\sin50^\circ$

(c)$\sin^2 10^\circ+\cos^2 20^\circ-\sin10^\circ\cos20^\circ$ (d)$\cos20^\circ-\cos40^\circ-\cos80^\circ$



(9) 令$\theta=\frac{\pi}{18}$，求$\frac{\sin5\theta+\sin\theta}{\cos5\theta+\cos\theta}$ 的值。

(10) 如圖，ΔABC 的對邊分別爲 a,b,c，P 爲 C 點的垂足，h 爲高，BP=x，AP=y，

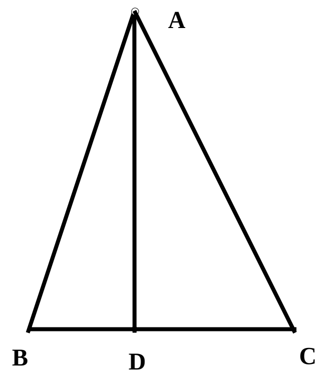
則下列那些選項必定爲真？

(A)cosC= $\frac{h}{a}+\frac{h}{b}$ (B)cosC= $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ (C)cosC=cos(A+B)

(D)cosC=$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}$(E)cosC= $\frac{h^2-xy}{ab}$ 。(91 學科)

(11) 如右圖，在ΔABC 中，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$於 D 點，

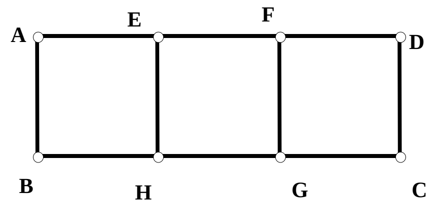
且$\overline{AD}$：$\overline{BD}$：$\overline{CD}$=6：2：3，求$\angle$BAC=？。



(12) 坐標平面上設 A(2，4)，B(3，1)，O(0，0)，則 tan$\angle$AOB＝_______ 。

(13) 矩形ABCD，AB=1，AD=3，分割如圖，

令$\angle$AFB=θ ，$\angle$ADB=ϕ，求$\theta+\phi$=______ 。



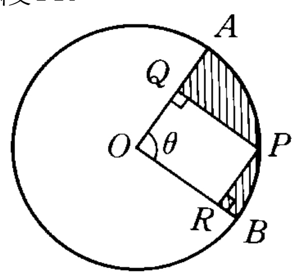
(14) 半徑 14 的圓 O 上有一扇形 AOB；如圖所示，在 $\overset{\frown}{AB}$ 弧上取一點 P，

已知 P 對$\overline{OA}$作垂直線段$\overline{PQ}$，其長爲 13；P 對$\overline{OB}$作垂直線段$\overline{PR}$，

其長爲 11。則：

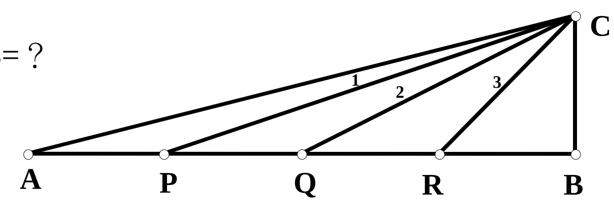
(a)若此扇形 AOB 的圓心角θ ，則θ爲________ 。

(b)斜線面積爲_________ 。



(15) 如圖，設 AP=PQ=QR=RB=BC，

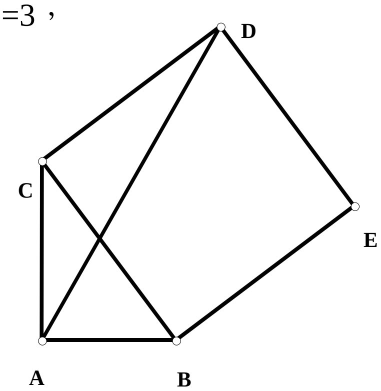
求(a)tan$\angle$1=？ (b)tan$\angle$2=？ (c)tan$\angle$3=？



(16) 設ΔABC 爲一直角三角形，BCDE 爲

以$\overline{BC}$爲一邊向外作出的正方形，若$\overline{BC}$=5，$\overline{CA}$ =4，$\overline{AB}$ =3，

試求 cos$\angle$ACD=_______ ，ΔACD 的面積=__________ 。



(17) 設 A,B,C 爲ΔABC 三內角的度量，

且 tanA,tanB,tanC 均有意義，

試證：tanA+tanB+tanC=tanA·tanB·tanC

(18) 設 A，B，C 均爲正銳角，tanA＝2，tanB＝4，tanC＝13，
則(a)tan(A＋B)＝__________；(b)A＋B＋C＝__________。

(19) 函數 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos 10x-\cos 12x)$，$x$ 爲實數。則下列選項那些是正確的？
(A)$f(x)=\sin 11x\sin x$ 恆成立 (B)$|f(x)|\le 1$ (C)$f(x)$的最大值是 1 (D)$f(x)$的最小值是−1 (E)$f(x)=0$ 有無窮多解。 (2002 學科)

(20) 已知ΔABC爲銳角三角形，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=10$，D點在$\overline{BC}$邊上，∠BAD=α，$\overline{BD}$：$\overline{CD}$=3：2，若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，(a)求 cosA=？ (b)$\overline{BC}$邊之長爲何。

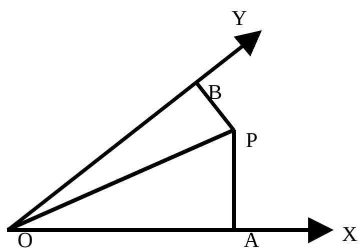
進階問題

(21) 設α+β+γ=π，證明：cotαcotβ+cotβcotγ+ cotγcotα=1

(22) 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$且 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{3}$，求 cos(α−β)與 cos(α+β)的值。

(23) 設 cosα+cosβ+cosγ=0，sinα+sinβ+sinγ=0，試求 cos(α−β)=______。

(24) 過銳角∠XOY 內部一點 P 作$\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}$之垂線，垂足爲 A、B，
若∠XOY=θ，試證：$\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{\overline{OA}+\overline{OB}}=\tan\frac{\theta}{2}$。



(25) 請證明：(a)$\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin^2x-\sin^2y$。
(b)$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-\sin^2y$。

(26) α ,β ,γ ,δ 均爲正銳角，$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=\frac{1}{5}$，$\tan\gamma=\frac{1}{7}$，$\tan\delta=\frac{1}{8}$，
求α +β +γ +δ =____。

(27) 設 $\cos x+\cos y=a$，$\sin x+\sin y=b$，試以 a,b 表示 $\cos(x-y)$=？

(28) 設tanα、tanβ爲$x^2+px+q=0$ 之二根($p^2-4q\ge 0$)，試以p,q表示
(a)tan(α+β)=？ (b)$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$=？

(29) 設 A,B,C 爲銳角ΔABC 三內角的度量，且 tanA,tanB,tanC 均有意義，
試求 tanA·tanB·tanC 之最小值。

(30) 設$x^2-px+q=0$ 的二根爲tanα，tanβ，且tanα+tanβ≠0，試求$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$=_____。

(31) 化簡$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2^\circ}{\sin(2k-1)^\circ\cdot\sin(2k+1)^\circ}$ 。 (Hint： $\sin 2^\circ=\sin[(2k+1)^\circ-(2k-1)^\circ]$)

(32) 求$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2^k}\cdot\cos\frac{3\theta}{2^k}=$？