第七單元 *n* 次方程式與不等式

(甲) *n* 次方程式的引入與解的意義

(1)由 n 次多項式到 n 次方程式

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 是 n 次多項式，方程式 $f(x)=0$ 稱為**n次(多項式)方程式**。

例如：$3x-\sqrt{35}=0$，$x^2-3x-54=0$，$(1+\frac{x}{100})^3=1.2$ 分別是 1 次、2 次、3 次方程式。

(2)方程式的根：

一個數 $\mathbf{x_0}$ 若滿足 $f(x_0)=0$，就稱 x_0 為方程式 $f(x)=0$ 的根或解。

若 x_0 為複數、實數、有理數或整數，x_0 又稱為複數根、實根、有理根或整數根。

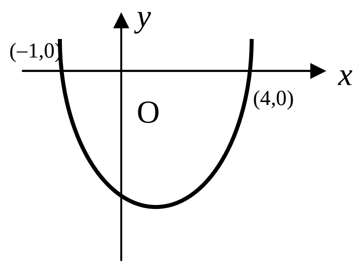
(3)實根的幾何解釋：

例如：

(a)$y=f(x)=x^2-3x-4$ 的圖形，如右圖所示：

圖形與 x 軸相交於兩點 $(-1,0)$、$(4,0)$，

其橫坐標 -1 與 4 就是 $x^2-3x-4=0$ 的實根。

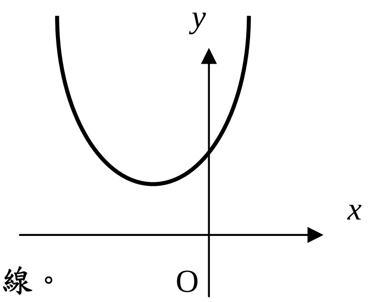


(b)$y=g(x)=x^2+x+1$ 的圖形，如右圖所示：

圖形與 x 軸沒有交點，因為 $y=g(x)=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$，

所以沒有任何實數 x，使得 $g(x)=0$，故 $g(x)=0$ 沒有實根。

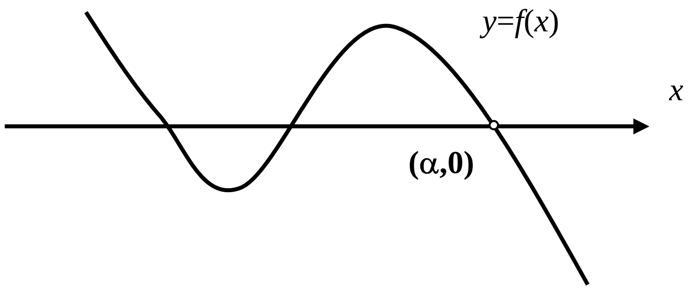
方程式 $x^2+x+1=0$ 的解 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。



一般而言，n 次函數 $y=f(x)$ 的圖形是**一條波浪形、平滑的連續曲線。**

若該曲線和 x 軸相交，那麼交點 $P(x_0,f(x_0))$ 的橫坐標 x_0 必滿足 $f(x_0)=0$，所以 x_0 是方程式 $f(x)=0$ 的一個實根，如果該曲線與 x 軸沒有交點，此時任何實數均不是方程式 $f(x)=0$ 的根，因此方程式 $f(x)=0$ 無實根。

實係數 n 次方程式 $f(x)=0$ 的實根 $\alpha \Leftrightarrow n$ 次函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於點 $(\alpha,0)$



(乙)n 次方程式的基本概念

討論n次方程式，就是要處理下面三個問題：

有沒有解？

有多少解？

如何找出解？

有沒有解的問題

一個實係數的n次方程式，不一定有實數解。例如$x^2+1=0$ 就沒有實數解，引進了複數之後，在複數系中，$x^2+1=0$ 有兩個複數根i及$-i$。但就一般的n次方程式，在複數系中，是不是一定有根呢？

這個存在性的問題，在西元 1799 年時，德國數學家高斯(Gauss 1777−1855)在他的博士論文中證明了「**在複數系中，n次方程式一定有根**」，它所討論的方程式不限於實係數而是複數的係數，但實數亦可看作是複數，所以這個結果亦可用到實係數的n 次方程式。我們將高斯的結果寫成下列的定理：

代數基本定理：每一個n次方程式，只要$n\geq 1$，就至少有一個複數根。

有了代數基本定理之後，不用擔心是否要為了找根而要一直擴展數系，它告訴我們，一個複係數的n次方程式，在複數系中，一定有複數根。所以我們只要將數系擴展到複數系，就解方程式而言就足夠了。

解的個數

一次方程式恰有一個根，二次方程式如果重根算是兩個，那麼二次方程式就恰有兩個根。

一般而言，如果計算重根的個數，(重根算二個、三重根算三個，…)那麼根據代數基本定理以及因式定理，我們可推得以下定理：

定理：**n次方程式就恰有n個根**。

有沒有公式解

另一個問題就是n次方程式有無求解的公式(將係數加減乘除開根號得到根)？

先來看一看幾個例子：

$n=1$ 時　$ax+b=0$ 的解是　$x=-\dfrac{b}{a}$。

n=2 時　$ax^2+bx+c=0$ 的解是　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

至於n=3 或 4 的公式解，一度曾經是數學競技鬥智的焦點。期間頗多戲劇化的情節發展。結果三次方程式由卡丹(Carden)於 1545 年公佈其解法於其著作「Ars Magna」中，而據傳說此解法是由Tartaglia教給Carden，並以保守此秘密爲條件，不料Carden竟然背信，將解法公佈，並據爲己有，可見Carden此人爲達目的不擇手段。至於四次方程式的公式解是由Carden的弟子斐拉利(Ferrari 1522–1565)所提出的。

但是對於五次方程式的堡壘，卻久攻不下，這個問題持續了兩三百年，直到 1832 年，一位法國青年Galois在其決鬥前夕所寫的遺書中，這位偉大的青年數學家引進了「群」的理論，證明了：**五次及五次以上的方程式，不可能有公式解**。從此數學家才解除了尋找公式解的惡夢。

(丙)多項方程式解的性質：

(1)實係數n次方程式虛根共軛成對：

例子：

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ 或 3

$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$x^3-x^2+4x-4=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+4)=0 \Rightarrow x=1，2i,-2i$

$x^4+5x^2+4=0 \Rightarrow (x^2+1)(x^2+4)=0 \Rightarrow x=i,-i,2i,-2i$

[討論]：能否造出一個實係數的二次方程式以 $1-i$ 爲它的一個虛根？

否造出一個只含一個虛根 $1-i$的實係數二次方程式？

實係數n次方程式虛根共軛成對
設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 爲一實係數n次多項式方程式(n次方程式)，
若$a+bi$(a,b爲實數，$b\neq0$)爲$f(x)=0$ 的一根，則$a-bi$亦爲$f(x)=0$ 的一根。

根據這個定理與因式定理，可以得知一個 n 次多項式 $f(x)$，一定可以因式分解成一次與二次實係數多項式的乘積。

即 $f(x)=A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_l)^{k_l}(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\cdots(x^2+b_mx+c_m)$

引理 1：若z_1,z_2爲二複數，則(a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ 。

證明：設$z_1=a_1+ib_1,z_2=a_2+ib_2$

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$，$z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_2b_1+a_1b_2)$

(1) $\overline{z_1+z_2}=(a_1+a_2)-i(b_1+b_2)=(a_1-ib_1)+(a_2-ib_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_2b_1+a_1b_2)$，

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a_1-ib_1)(a_2-ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_2b_1+a_1b_2)$ 所以 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

引理 2：$\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ ，其中n爲正整數。

證明：

(a)$n=1$ 時，自然成立。

(b)若設$n=k$(k爲自然數)時，$\overline{z^k}=(\overline{z})^k$

則當$n=k+1$ 時，$\overline{z^{k+1}}=\overline{z^k\cdot z}=\overline{z^k}\cdot\overline{z}=(\overline{z})^k\cdot\overline{z}=(\overline{z})^{k+1}$

所以$n=k+1$ 時，原式成立。

根據(a)(b)由數學歸納法原理可以得證。

定理一：

若$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$爲一**實係數**$n$次多項式，$z$爲一個複數，

則 $\overline{f(z)}=f(\overline{z})$ 。[$\overline{f(z)}=f(\overline{z})$ 表示$f(z)$與$f(\overline{z})$互爲共軛複數]

[證明]：

設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 爲實係數多項式

$\overline{f(z)}=\overline{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}$ (根據引理一)

$=\overline{a_nx^n}+\overline{a_{n-1}x^{n-1}}+\ldots+\overline{a_1x}+\overline{a_0}$ (根據引理一)

$=\overline{a_n}\cdot\overline{x^n}+\overline{a_{n-1}}\cdot\overline{x^{n-1}}+\ldots+\overline{a_1}\cdot\overline{x}+\overline{a_0}$ (根據引理二，a_n、a_{n-1}、…、a_0爲實數)

$=a_n\cdot\overline{x^n}+a_{n-1}\cdot\overline{x^{n-1}}+\ldots+a_1\cdot\overline{x}+a_0$

(練習1) 設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$爲一實係數$n$次多項式：

(1)若$f(2-3i)=-4+5i$，求$f(2+3i)=$？

(2)若$f(-1+6i)=-5$，求$f(-1-6i)=$？ Ans：(1)$-4-5i$ (2)-5

實係數 n 次方程式虛根共軛成對的證明：
因為 $a+bi$ 為 $f(x)=0$ 的一根，所以 $f(a+bi)=0$

由定理一可知：$f(a+bi)$與$\overline{f(a+bi)}$互為共軛複數，所以

$\overline{f(a+bi)}=\overline{0}=0=f(\overline{a+bi})=f(a-bi)$，所以 $a-bi$ 亦為 $f(x)=0$ 的一根。

[討論]：
(1)實係數方程式虛根成對的應用：
若 $f(x)=0$ 為一個 3 次的實係數方程式，是否一定有實根呢？
若 $f(x)=0$ 為一個 4 次的實係數方程式，是否一定有實根呢？

一般的情形：

(a)若 $f(x)=0$ 為一個奇數次的實係數 n 次方程式，一定有實根。
(b)若 $f(x)=0$ 為一個偶數次的實係數方程式，一定有偶數個實根。(可能沒有實根)

(2)n次方程式$f(x)=0$ 的係數要有什麼條件才會使得無理根成對？
例子：
設$f(x)=x^4-6x^3+7x^2+6x-2$
(a)驗證 $2+\sqrt{3}$是有理係數$f(x)=0$ 的一個無理根。
(b)取$g(x)=[x-(2+\sqrt{3})][x-(2-\sqrt{3})]=x^2-4x+1$，請問$f(x)$是否能被$g(x)$整除？
(c)請問 $2-\sqrt{3}$是否為$f(x)=0$ 的另一個無理根。

(練習2) 設 $f(x)$為有理係數多項式，a,b 為有理數，且$\sqrt{b}$為無理數
試證明：若 $x=a+\sqrt{b}$為 $f(x)=0$ 之一根，則 $x=a-\sqrt{b}$亦為其根。

[例題1] 實係數方程式$x^4-5x^3-2x^2+14x-20=0$ 有一根 $1+i$，則求方程式所有的根。
Ans：$1+i$，$1-i$，-2，5

[例題2] 設a,b爲實數，若 $2i-1$ 爲$x^4+3x^3+(a+1)x^2+ax+b=0$ 的一根，則求a,b之值。
Ans：$a=7$，$b=5$

(練習3) $f(x)$爲實係數多項式，已知 $f(3+5i)=7-2i$，則 $f(3-5i)=$？ Ans：$7+2i$

(練習4) $f(x)=x^4-8x^3+25x^2-30x+8$，試求$f(2+i)=$？$f(2-i)=$？Ans：$6i,-6i$

(練習5) 已知 $2+i$爲$f(x)=x^4-4x^3+8x^2-12x+15=0$ 的一根，求$f(x)=0$ 所有的根。
Ans：$2\pm i$，$\pm\sqrt{3}\ i$

(練習6) 設 $f(x)$爲實係數三次多項式，且 $f(i)=0$ ($i=\sqrt{-1}$)，則函數 $y=f(x)$的圖形與 x 軸有幾個交點？
(A)0(B)1(C)2(D)3(E)因 $f(x)$而異。 Ans：(B)

(練習7) 設實係數多項式$f(x)=2x^3+3x^2+mx+n$，若$f(i-1)=0$，則數對$(m,n)=$？
Ans：$(2,-2)$

(練習8) 設a爲有理數，若 $2+\sqrt{3}$ 爲$x^4-4x^3+2x^2-4x+a=0$ 之一根，則$a=$？
Ans：$a=1$

(3)根與係數的關係：

[例題3] 設三次方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根爲α,β,γ，試求根與係數之關係：
(1)$\alpha+\beta+\gamma=$____ (2)$\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\gamma+\gamma\cdot\alpha=$_____ (3)$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=$_____ 。
Ans：(1)$-\frac{b}{a}$ (2)$\frac{c}{a}$ (3)$-\frac{d}{a}$

[例題4] 設四次方程式$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 之四根爲$\alpha,\beta,\gamma,\delta$，試求根與係數的關係：
(1)四根之和，(2)任意相異兩根乘積之和，(3)任意相異三根乘積之和，(4)四根之積。 Ans：(1)$-\frac{b}{a}$ (2)$\frac{c}{a}$ (3)$\frac{-d}{a}$ (4)$\frac{e}{a}$

[討論]：設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 爲n次方程式，其根爲α_1、α_2、…、α_n
根與係數的關係如何表示？

(練習9) 設方程式 $2x^3+3x-5=0$ 的三根爲α、β、γ，求下列各式的值：
(a)$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ (b)$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ Ans：(a) $\frac{3}{5}$ (b)-3

(練習10) 已知方程式$x^4-x^3-56x^2+ax+b=0$ 的根中，有二根的比爲 2：3，而另二根的差爲 1，求整數a,b之值。 Ans：$a=36,b=720$

(丁)解根的方法：

(1)整係數的n次方程式找有理根：

(a)一次因式檢驗定理：

設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$為一個**整係數**$n$次多項式，
若整係數一次式$ax-b$是$f(x)$的因式，且a,b互質，則$a|a_n$且$b|a_0$。

(b)有理根檢驗定理：

設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為一個**整係數**n次方程式，
若 $x=\dfrac{b}{a}$ 為$f(x)=0$ 之一有理根，a,b為整數且互質，則$a|a_n$且$b|a_0$。

[例題5] 解方程式 $2x^4+x^3-21x^2-2x+6=0$。Ans：3，$\dfrac{1}{2}$ ，$-2+\sqrt{2}$ ，$-2-\sqrt{2}$

[例題6] 設$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ 為整係數的n次方程式，
若α為$f(x)=0$ 為有理根，試證明α為整數。

[例題7] 證明：$\sqrt[3]{2}$ 為無理數。

(練習11) 試求方程式 $f(x)=6x^4+5x^3+3x^2-3x-2=0$ 之有理根。 Ans：$\frac{2}{3}$ ，$\frac{-1}{2}$

(練習12) 設a,b,c爲整數，且$x^4+ax^3+bx^2+cx+9=0$ 之四根爲相異之有理數，求a,b,c之值。 Ans：$a=0,b=-10,c=0$

(練習13) 設p,q爲自然數，且$f(x)=x^5-2px^4+x^3-qx^2+x-2$ 有整係數一次因式，則求p,q之值。 Ans：$p=1,q=2$

(練習14) 證明：$\sqrt[3]{5}$爲無理數。

(2)找無理根的問題：

利用整係數一次因式檢驗定理，可解決有理根的問題，但是就一般的方程式而言，要找出解，尤其是高次的方程式，通常不是一件容易的事情。

例如：$f(x)=x^5+3x^2-7x+2=0$，由於它是整係數的 5 次多項式，所以一定有實根，先考慮是否有理根，根據牛頓定理，$x=\pm1$，±2 逐一代入多項函數$f(x)$中，去看$f(x)$值的變化：

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-4	11	-1	32

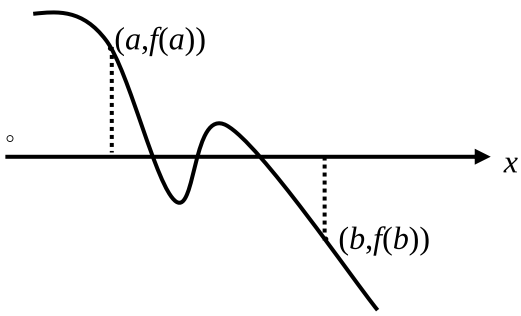
可以看出，$f(x)=0$ 並無有理根，因爲它一定有實根，所以它的實根必爲無理根。通常我們無法直接求出 $f(x)=0$ 無理根的形式，只能求得它的近似值。從上面的資料我們可以掌握一些重要的訊息：

當 x 從-2「連續地」變化到-1 時，對應的函數值 $f(x)$也從-4「連續地」變化到 11。所以函數值 $f(x)$在-4 與 11 之間一定會有等於 0 的情形發生，換句話說，在-2 與-1 之間一定有一個數α，$f(\alpha)=0$；同理，在-1 與 1 之間會有一個數β，1 與 2 之間會有一個數γ分別使得 $f(\beta)=0$，$f(\gamma)=0$。

推廣這個概念可得以下的定理：

勘根定理：

設 $f(x)=0$ 爲實係數 n 次多項方程式，a,b 是兩個實數，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，則在 a,b 之間至少有一個 $f(x)=0$ 的實根。

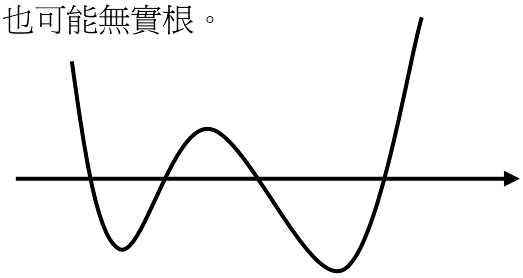


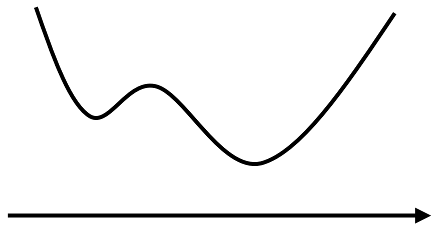
[定理的說明]：

注意：

(a)從觀察圖形可知，當 $f(a)\cdot f(b)<0$ 時，則 a,b 之間的根必有實根。

(b)從圖形的觀察，當 $f(a)\cdot f(b)>0$ 時，$f(x)=0$ 在 a,b 之間可能有實根，
也可能無實根。





[例題8] 試問在那些連續整數之間，$f(x)=12x^3-8x^2-23x+11=0$ 有根？
Ans：-2 與 -1，0 與 1，1 與 2

[例題9] 設 a 是一個固定的正數，試證明：方程式 $x^n=a$ (n 爲自然數)恰有一正實根。

(1)證明存在性：

設 $f(x)=x^n-a$，$\because f(0)=-a<0$，$f(1+a)=(1+a)^n-a>(1+a)-a=1>0$

故在(0,1)之間存在一正實根。

(2)證明唯一性：

設 α，β 皆爲方程式 $x^n-a=0$ 的正根，$\therefore \alpha^n-a=0$，$\beta^n-a=0$

兩式相減得 $\alpha^n-\beta^n=0$

$\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+---+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})=0$

$\because \alpha,\beta$ 皆爲正數，$\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+---+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}>0 \therefore \alpha=\beta$

$\therefore$ 方程式 $x^n-a=0$ 有唯一的正根

附註；我們將 $x^n-a=0$ 唯一的正根定義爲 $\sqrt[n]{a}$

[討論]：

(1)方程式 $x^7=-5$ 有幾個實根？實根中正根有幾個？負根有幾個？

(2)如何定義 $\sqrt[7]{-5}$？

[例題10] 設二多項式 $f(x)$與 $g(x)$，對於二相異實數 a,b 有下列關係 $f(a)<g(a)$，$f(b)>g(b)$，證明：在 a,b 之間存在一個實數 c 使得 $f(c)=g(c)$。

(練習15) 證明存在一正實數r，使得$r^4+2r+1=\sqrt{2}$ 。

(練習16) 討論方程式$x^3+x-5=0$ 是否有實根？有多少個實根？
Ans：此方程式有一實根。

(戊)n 次不等式的基礎概念

(1)n 次不等式：
設$y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots..+a_1x+a_0$是實係數$n$次多項式，那麼不等式$f(x)>0$、$f(x)<0$、$f(x)\geq0$、$f(x)\leq0$ 就叫做**多項不等式**或**n次多項不等式**(簡稱n次不等式)。

例：$2x-3>0$, $x^2-3x+2>0$ 分別爲一次、二次不等式。

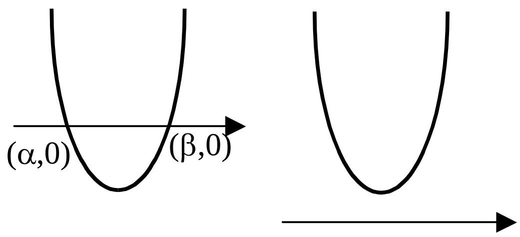
(2)不等式的解：**滿足n次不等式的值，叫做n次不等式的解**

(3)不等式的基本性質：
三一律：$a>b,a=b,a<b$ 三式中恰有一式會成立
遞移律：若$a>b$且$b>c$，則$a>c$
加法律：若$a>b$，則$a+c > b+c$ ($c\in R$)
乘法律：若$a>b$，且$c >0$，則$ac>bc$ (不變號)
若$a>b$，且$c <0$，則$ac<bc$ (要變號)

(己)一次與二次不等式

(1)一次不等式是形如 $ax+b>0(\geq0)$或 $ax+b<0(\leq0)$的不等式。
二次不等式是形如$ax^2+bx+c>(\geq)0$ 或$ax^2+bx+c<(\leq)0$，其中a,b, c爲實數。

(2)解二次不等式：
設不等式$ax^2+bx+c(>,<,\geq,\leq)0$，先將$a$調整爲正
先解一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$ 的二根α、β



(a)設$a>0$，$D=b^2-4ac>0$，α ,β (α<β)爲兩實數
因爲$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

分段討論ax^2+bx+c的正負：

x	$x<\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x>\beta$
$x-\alpha$	–	+	+
$x-\beta$	–	–	+
$(x-\alpha)(x-\beta)$	+	–	+

根據上面的討論可得：

解$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x>\alpha$或$x<\beta$(大於大的根或小於小的根)

解$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$ (介於兩實根之間)

(b)設$a>0$，$D=b^2-4ac=0$，　$\alpha=\beta$爲兩相等實數

因爲$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$

分段討論ax^2+bx+c的正負：

x	$\alpha<x$	$x>\alpha$
$x-\alpha$	–	+
$(x-\alpha)^2$	+	+

根據上面的討論可得：

解$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow x\neq\alpha$(或$\beta$) [$x>\alpha$或$x<\alpha$]

(c)設$a>0$，$D=b^2-4ac<0$，α、β均爲虛數

$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，因爲$a>0$ 且$b^2-4ac<0$，所以$\frac{4ac-b^2}{4a}>0$

故不管x代入那一個實數，ax^2+bx+c恆正。

解$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$ 所有實數均爲解。　　解$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ 無解。

[例題11] 有一項運動協會，要從 250 位會員代表中選出 7 位理事，250 位代表每人投一票互選。如果想選上理事，至少要得多少票，才能保證當選？

Ans：32 票

[例題12] 解下列各不等式：

(1)$x^2+4x-1>0$　(2)$x^2-2x+3<0$　(3)$x^2-2\sqrt{3}\ x+5>0$　(4)$-3x^2+6x-1\geq0$

Ans：(1)$x>-2+\sqrt{5}$或$x<-2-\sqrt{5}$ (2)無解 (3)所有實數 (4)$1-\frac{\sqrt{6}}{3}\leq x\leq1+\frac{\sqrt{6}}{3}$

(練習17) 解下列各不等式：

(1)$16x^2-22x-3\le0$　(2)$3x^2-2x+5<0$　(3) $-4\le x^2-5x<6$

(4) $x^2-2x+1>0$(5)$9x^2+1\le6x$　(6)$3x^2-2x-7\ge0$

Ans：(1)$-\frac{1}{8}\le x\le\frac{3}{2}$　(2)無解　(3) $-1<x\le1$ 或 $4\le x<6$

(4) $x\neq1$　(5)$x=\frac{1}{3}$　(6) $x\ge\frac{1+\sqrt{22}}{3}$ 或 $x\le\frac{1-\sqrt{22}}{3}$

(練習18) 若$x^2+ax+b<0$ 之解為$-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$，則$x^2+ax-4b>0$ 之解為何？

Ans：$x>1$ 或$x<-4$

(庚)高次不等式的解法

(1)代數解法：

1.基本實例：

解不等式$(x-1)(x-2)(x+3)<0$

2.領導係數為負

解$(x-1)(x-3)(5-x)<0$　Ans：$1<x<3$ 或 $5<x$

3.有恆正的因式

解不等式$(x^2+x+1)(x-1)(x+1)\le0$　Ans：$-1\le x\le1$

4.有重因式時

解不等式$(x+3)^3(x-1)^2(x-2)<0$　Ans：$-3<x<2$，且$x\neq1$

解不等式$(x+3)^3(x-1)^2(x-2)\le 0$　Ans：$-3\le x\le 2$

(2)幾何解法：

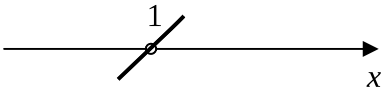
$$f(x)=A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_l)^{k_l}(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\cdots(x^2+b_mx+c_m)$$

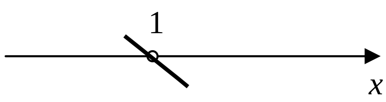
在$x=a_1$、a_2、…、a_l附近的圖形特徵：

(a)$f(x)=(x-1)Q(x)$,其中$Q(1)\neq 0$

在$x=1$ 附近：$f(x)\approx Q(1)(x-1)$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q(1)(x-1)$類似

Q(1)>0　　　　Q(1)<0

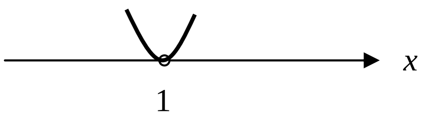


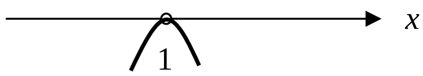


(b)$f(x)=(x-1)^2Q(x)$，其中$Q(1)\neq 0$

在$x=1$ 附近：$f(x)\approx Q(1)(x-1)^2$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q(1)(x-1)^2$類似

Q(1)>0　　　　Q(1)<0

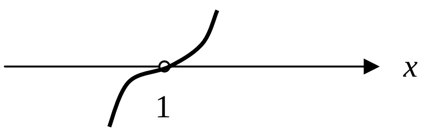


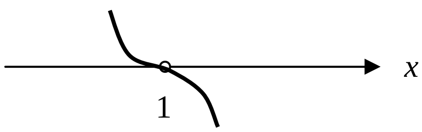


(c) $f(x)=(x-1)^3Q(x)$，其中$Q(1)\neq 0$

在$x=1$ 附近：$f(x)\approx Q(1)(x-1)^3$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q(1)(x-1)^3$類似

Q(1)>0　　　　Q(1)<0

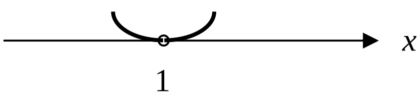


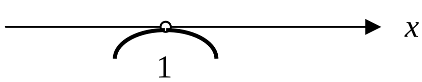


(d) $f(x)=(x-1)^4Q(x)$，其中$Q(1)\neq 0$

在$x=1$ 附近：$f(x)\approx Q(1)(x-1)^4$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q(1)(x-1)^4$類似

Q(1)>0　　　　Q(1)<0





實例說明：

設$f(x)=0.1(x-1)^2(x+1)(x-2)^3(x^2+x+1)$，

如何探討$f(x)$的圖形在$f(x)=0$的實根$-1,1,2$附件的圖形特徵(包括零根位置、重根的意涵、函數值的正負)

在$x=-1$附近：$f(x)=(x+1)[0.1(x-1)^2(x-5)^3(x^2+x+1)]=(x+1)Q_1(x)$，

當x接近-1時，$f(x)\approx Q_1(-1)(x+1)$，其中$Q_1(-1)<0$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q_1(-1)(x+1)$類似。

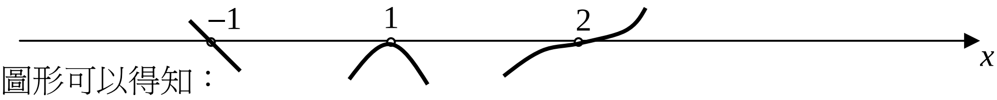
在$x=1$附近：$f(x)=(x-1)^2[0.1(x+3)(x-5)^3(x^2+x+1)]=(x-1)Q_2(x)$，

當x接近1時，$f(x)\approx Q_2(1)(x-1)^2$，其中$Q_2(1)<0$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q_2(1)(x-1)^2$類似。

在$x=2$附近：$f(x)=(x-2)^3[0.1(x-1)^2(x+3)(x^2+x+1)]=(x-2)^3Q_3(x)$，

當x接近2時，$f(x)\approx Q_3(2)(x-5)^3$，其中$Q_3(2)>0$，因此$f(x)$的圖形特徵與$y=Q_3(2)(x-2)^3$類似。

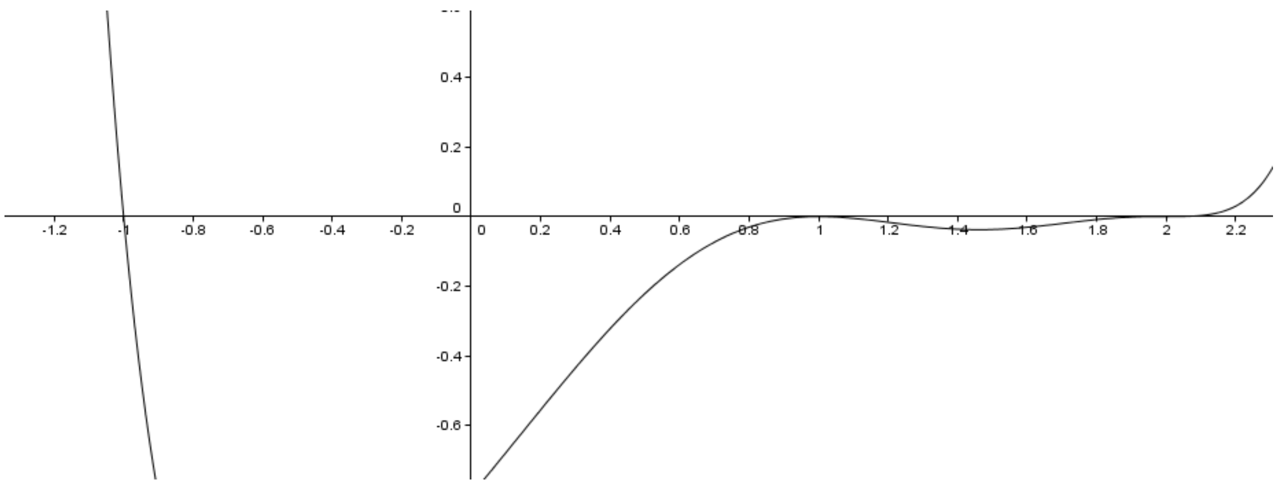
根據前面的分析，可以大略得知$f(x)$的圖形在實根$-3,1,2$附近的圖形特徵：



根據圖形可以得知：

x	$-1>x$	$-1<x<1$	$1<x<2$	$x>2$
$f(x)$	+	–	–	+

整體圖形可以使用電腦軟體繪製：



[例題13] 解分式不等式：

(1)$x>\frac{1}{x}$ (2) $\frac{x+2}{(x^2+x+1)(x-1)}\le 0$ Ans：(1)$x>1$ 或$-1<x<0$ (2)$-2\le x<1$

(練習19) 解下列不等式：

(a)$(x^2-4)(2x+1)(-x+3)\ge 0$ (b) $x^3-5x^2+2x+8<0$ (c)$(x+1)^2(x-2)(x-3)\le 0$

(d) $x^3+3x^2+3x+9\le 0$ (e)$(x-1)^2(x^2-3x-18)<0$ (f)$(x^2+3x+6)(x^2-x-3)<0$

Ans：(a)$-2\le x\le\frac{-1}{2}$或 $2\le x\le 3$ (b) $x<-1$ 或 $2<x<4$ (c)$2\le x\le 3$ 或$x=-1$

(d) $x\le -3$ (e)$-3<x<6$ 且$x\ne 1$ (f)$\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

(練習20) 解分式不等式：

(a)$\frac{2x+5}{3x-4}\ge 0$ (b)$\frac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2}\ge 1$ (c)$\frac{1}{x+1}<\frac{x+3}{x^2+x-2}$

Ans：(a)$x\le\frac{-5}{2}$ 或 $x>\frac{4}{3}$ (b)$\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x\le 1$ 或$\frac{1+\sqrt{17}}{4}<x\le 2$

(c)$x>1$ 或$\frac{-5}{3}<x<-1$ 或 $x<-2$

(辛)二次函數恆正或恆負的條件

設二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$，$a\ne 0$，$D=b^2-4ac$

(1)二次不等式解的幾何解釋：

考慮二次函數$f(x)=ax^2+bx+c$的圖形：

$f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，頂點爲$(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

(a)解$ax^2+bx+c>0$

⇔在圖形上找那些實數x使得其所對應的點(x,ax^2+bx+c)在x軸的上方。

解$ax^2+bx+c<0$

⇔在圖形上找那些實數x使得其所對應的點(x,ax^2+bx+c)在x軸的下方。

(b)二次函數恆正與恆負的條件：

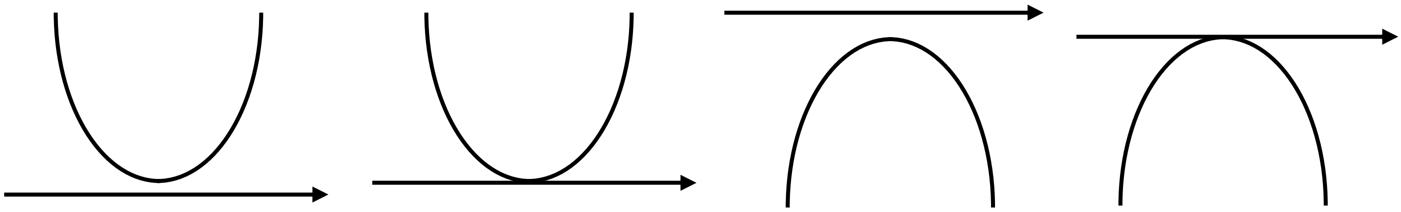
①對於所有的實數x，$f(x)>0$ (恆正)

⇔圖形上的每一點的y坐標均大於 0(圖形在x軸上方)
⇔ $a>0$ 且D<0　(開口向上，與x軸無交點)

②對於所有的實數x，$f(x)<0$ (恆負)
⇔圖形上的每一點的y坐標均小於 0(圖形在x軸下方)
⇔ $a<0$ 且D<0　(開口向下，與x軸無交點)

③對於所有的實數x，$f(x)\geq 0$ (不爲負)
⇔圖形上的每一點的y坐標均大於等於 0(圖形不在x軸下方)
⇔ $a>0$ 且D≤0　(開口向上，與x軸無交點或相切)

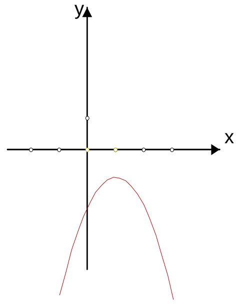
④ 對於所有的實數x，$f(x)\leq 0$ (不爲正)
⇔圖形上的每一點的y坐標均小於等於 0(圖形不在x軸上方)
⇔ $a<0$ 且D≤0　(開口向下，與x軸無交點或相切)



[例題14] 設$f(x)=(3-a)x^2+ax-2a>0$ 對於所有的實數x都成立，請求出a的範圍。
Ans：$a<0$

[例題15] 不等式$x^2+2(m+2)x+2m^2<0$ 無解，求m的範圍。
Ans：$m>2+2\sqrt{2}$ 或$m<2-2\sqrt{2}$

[例題16] $\forall\ x \in \mathrm{R}$，$f(x)=x^2-(k-3)x+4$，$g(x)=-x^2+(k-1)x+(k-2)$，$f(x)$恆在$g(x)$上方時，求$k$範圍。Ans：$-2<k<4$



(練習21) $y=f(x)=kx^2+2x+k$之圖形如右，求實數k的範圍？
Ans：$k<-1$

(練習22) a 爲實數，且對於所有實數 x，不等式$\dfrac{x^2+2ax+1}{3x^2-2x+3}\leq 5$恆成立，則求 a 值之範圍。 Ans：$-19\leq a\leq 9$

(練習23) 令$g(x)=-x^2+2(3m-1)x-(8m^2+17)$，$m$爲實數，求使得$g(x)\geq 0$ 無解之m的範圍。 Ans：$-2<m<8$

綜合練習

(1) 實係數多項式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，請問下列選項那些是正確的？
(A)若a,b爲實數，且$f(a)f(b)<0$，則$f(x)=0$ 在a,b之間有實根。
(B)若a,b爲實數，且$f(x)=0$ 在a,b之間有實根，則$f(a)f(b)<0$。
(C)若 $1-5i$爲$f(x)=0$ 之根，則 $1+5i$亦爲$f(x)=0$ 的根。
(D)若 整係數一次因式$ax+b|f(x)$，則$a|a_n$且$b|a_0$。
(E)若$f(1-\sqrt{2})=0$，則$f(1+\sqrt{2})=0$。

(2) 設三次方程式$x^3-17x^2+32x-30=0$ 有兩複數根$a+i$，$1+bi$，其中a,b是不爲 0 的實數，試求它的實根。 (89 學科能力測驗)

(3) 設$f(x)$爲三次實係數多項式，且知複數 $1+i$爲$f(x)=0$ 之一解。
試問下列哪些敘述是正確的？
(A)$f(1-i)=0$ (B)$f(2+i)\neq 0$ (C)沒有實數滿足$f(x)=0$ (D)沒有實數滿足$f(x^3)=0$
(E)若$f(0)>0$ 且$f(2)<0$，則$f(4)<0$ (93 學科能力測驗)

(4) 設一元二次整係數方程式$ax^2+bx+c=0$ 有一根 $4+3i$ 。若將此方程式的兩根與原點在複數平面上標出，則此三點所圍成的三角形面積爲
(1)5 (2)6 (3)12 (4)16 (5)24。(95 學科能力測驗)

(5) 方程式$x^4-4x^3-3x^2+x+1=0$ 在下列哪兩個整數之間有實數根?
(A)–3 與–2 之間 (B)–2 與–1 之間 (C)–1 與 0 之間 (D) 0 與l之間 (E) 1 與 2 之間。(91 指定考科乙)

(6) 設$f(x)=x^4-3x^3-16x^2+3x+35$，試問$y=f(x)$的圖形在下面那個範圍中與$x$軸有交點？
(A)$-1<x<0$ (B)$0<x<1$ (C)$1<x<2$ (D)$2<x<3$ (E)$3<x<4$。

(7) 已知實係數四次多項函數$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，若$f(x)$值之正負如下表：且$f(-3+2i)=0$。

x	小於–4	–3	–2	–1	0
$f(x)$值	–	–	–	–	+

下面那些結論是正確的？(A)–3,–2 之間有實根 (B)–1,0 之間恰有一個實根
(C)$f(x)=0$ 有四個實根 (D) $f(x)=0$ 恰有一正根(E) $-3-2i$ 為 $f(x)=0$ 的根。

(8) 設a為實數，令α,β為二次方程式$x^2+ax+(a-2)=0$ 的兩根。試問當a為何值時，$|\alpha-\beta|$的值最小？答 a = ________。(93 指定考科乙)

(9) 設方程式$x^5=1$ 的五個根為$1,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$，則$(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)=$ (1) 81 (2) 162 (3) 121 (4) 242。(93 指定考科甲)

(10) 二次方程式$ax^2-(a-1)x-6=0$ 有一根介於 1 與 2 之間，另一根介於–1 與–2 之間，求實數a之範圍。

(11) 設$f(x)$與$g(x)$為實係數多項式，用x^2-3x+2 除$f(x)$得餘式 $3x-4$，用$x-1$ 除$g(x)$得餘式 5，且$g(2)=-3$。
(a)試求以$x-1$ 除$f(x)+g(x)$的餘式。(b)試證明：$f(x)\cdot g(x)=0$ 在１與２之間有實根。

(12) 設 $a<b<c$，若 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ 有兩實根α,β，且$\alpha<\beta$，比較 a,b,c,α,β 的大小。

(13) 解下列方程式：
(a)$2x^3+3x^2+11x+5=0$ (b)$2x^4-x^3-9x^2+13x-5=0$。

(14) 已知方程式$x^4-5x^3-2x^2+14x-20=0$ 之一根為 $1+i$，試解出此方程式其它的根。

(15) 設整係數方程式$x^4+3x^3+bx^2+cx+10=0$ 有四個相異有理根，試求b,c的值。

(16) 設a,b為實數，$a\neq0$，若方程式$ax^3+x^2+bx+1=0$ 之一根為 $2+\sqrt{2}\,i$，試求a,b的值。

(17) 已知方程式$x^4+ax^3+ax^2+11x+b=0$ 有二根 3，–2，求a,b的值及其它兩根。

(18) $y=f(x)$為一多項函數，若$f(0)>0$，$f(1)<1$，試證在 0,1 之間存在一實數c，使得$f(c)=c^2$。

(19) 已知方程式$x^4-4x^3-34x^2+ax+b=0$ 之四根成等差數列，試求a,b的值及四個根。

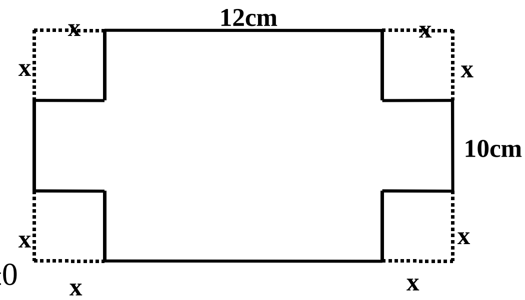
(20) 已知方程式$x^4+3x^3-x^2-5x-12=0$，其中有兩根之乘積爲-4，試解此方程式。

(21) 試解下列各二次不等式：
(a)$-x^2+x-1>0$ (b)$-x^2+x-1<0$ (c)$x^2<x+1$
(d)$x^2>x+1$ (e)$-x^2+6x-9<0$ (f)$x^2+8x+4<0$ (g)$x^2-4x-4<0$

(22) 解下列不等式：
(a)$(x-1)^{80}(x^2+x+1)(x-2)(x-3)(x-4)^4<0$
(b)$(x^2+x+1)(x-1)(x-2)^2(x-3)^{33}<0$
(c)$(x^2+3x+6)(x^2-x-3)<0$

(23) 若已知一實係數方程式$f(x)=x^3+\mathrm{a}x+\mathrm{b}=0$ 之一複數根爲 $1-2i$，求
(a)數對$(\mathrm{a},\mathrm{b})=$？。(b)$f(x)=0$ 之所有解。(c)不等式$f(x)<0$ 的解。

(24) 如右圖，將一個無蓋容器展開，
欲使容器的容積至少爲 $80\mathrm{cm}^3$，求x値的範圍。



(25) (a)解不等式 $\dfrac{2}{x+1}<x$ 的解。(b)解不等式$\dfrac{x^2(x-1)}{(2-x)(x+1)}\geq 0$

(26) 對於任意一個實數x，$y=2x^2-2ax+(5+2a)$的圖形恆在$y=ax^2$的上方，則實數a的範圍爲__________。

(27) 設對所有實數x，$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6$ 之值恆爲正，求實數m的範圍？

進階問題

(28) 設$a_1<a_2<a_3$且b_1、b_2、b_3均爲正數
試證明：$\dfrac{b_1}{x-a_1}+\dfrac{b_2}{x-a_2}+\dfrac{b_3}{x-a_3}=1$ 有三相異實根。

(29) 解下列方程式：
(a)$x^4-4x^3+x^2+4x+1=0$ (b) $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$ (c)$2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}=5$

(30) 試證明：實係數n次方程式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_3x^3+x^2+x+1=0$，$n\geq 3$ 的根不能全爲實數。

(31) 利用$y=|x^2-2x-3|$與直線$y=x+1$ 之圖形，求$|x^2-2x-3|\geq x+1$ 的解。

(32) 若$ax^2+(1-5a)x+6a=0$ 之二根皆大於 1，試求a的範圍。

(33) 設$f(x)=2x^2+(a-1)x-a(a-1)$，在 $0\leq x\leq 1$ 間的值恆爲負，則a之範圍=？

(34) 設$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots.+a_1x+a_0$爲整係數多項式，若已知有四個相異正整數$a,b,c,d$使得$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=3$，證明：方程式$f(x)=8$ 無整數解。