第十五單元　三角函數的圖形與性質

摩天輪常常成爲城市顯著的地標，摩天輪車廂的轉動情形，可以視爲等速率圓周運動。若每隔一段時間測量某一個車廂的高度，時間與高度的關係是函數關係，觀察摩天輪車廂轉動的情形，可以發現固定一段時間間隔，同一個車廂會出現在相同的高度，因此這樣的函數具有「**週期性**」。日常生活中有許多現象都具有重複出現的特性，像是日升日落的時間，月亮形狀的變化，單擺擺動的高度，彈簧震動的過程中伸長量的變化等。這些現象都具有週期性，研究具有週期性的現象自古就是相當重要的課題，而「**三角函數**」是研究週期現象的基礎與起點。

(甲)弧度制

觀察量角器，整個半圓分成 180 等分，1 等分所對應的角度大小就定義成 1 度。這種定義方式是人爲的，就像重量的單位有公斤、磅、台斤等，有時候是某些習慣用法或歷史上的因素，同理，我們對於角度的大小也可以定義不同的度量的單位，去表示角度的大小。

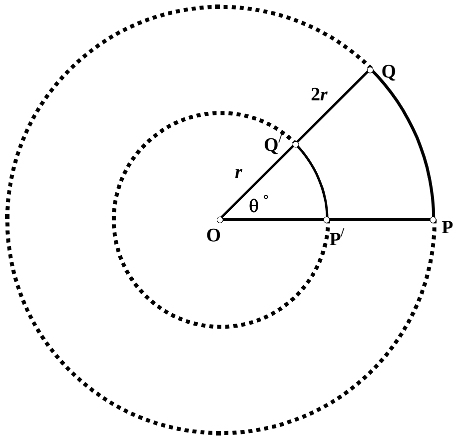
觀察右圖，計算$P'Q'$的弧長$=\dfrac{\theta^\circ}{360^\circ}\times 2\pi r=\dfrac{\pi\theta r}{180}$，

PQ的弧長$=\dfrac{\theta^\circ}{360^\circ}\times 4\pi r=\dfrac{\pi\theta r}{90}$，觀察這個結果可以發現

$P'Q'$的弧長：PQ的弧長$=1：2=r：2r$，

因此**只要圓心角固定，弧長與半徑的比值是一個定值。**

數學上就利用這個定值來定義角度，這個比值本身是一個實數，有別於用特定的單位去定義角度，也因此能將三角函數視爲定義在實數或實數的子集合上的函數，對於後續的應用與理論的發展有很重要的影響。



(1)弧度的定義：

設有一圓，圓心爲O，半徑爲r，在圓周上取一段圓弧$\overset{\frown}{PQ}$，使得圓弧$\overset{\frown}{PQ}$的長度等於r，規定這一段圓弧$\overset{\frown}{PQ}$所對的圓心角∠POQ為 1 弧度。

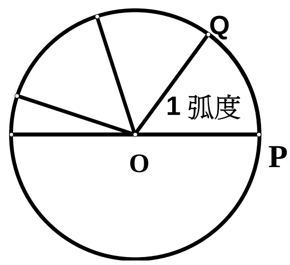
符號：∠POQ=1 弧度=1(rad)。

①當$\overset{\frown}{PQ}$的長度爲r時，就說∠POQ =1 弧度。

②當$\overset{\frown}{PQ}$的長度爲 $2r$時，就說∠POQ =_________弧度。

③當$\overset{\frown}{PQ}$的長度爲 $3r$時，就說∠POQ =_________弧度。

④當$\overset{\frown}{PQ}$的長度爲xr時　就說∠POQ =_________弧度。



由此可得：半圓的周長爲πr，是半徑r的π倍，所以半圓的圓心角爲π弧度，又半圓的圓心角也是 180 度(以國中所學“°”度爲單位)。所以用 180 度與π弧度所代表的角度大小都是一樣的。這個情形就好像重量單位中，1 磅與 0.454 公斤所代表的重量是相同的。

(2)度與弧度之互換：

設x弧度相當於$y°$，因爲π弧度相當於 180°，所以$\frac{x}{\pi}=\frac{y}{180}$。

$1°=\frac{\pi}{180}$ 弧度約等於 0.01745 弧度。

1 弧度=$(\frac{180}{\pi})°$約等於 57.2958°($57^\circ17'45''$)，注意弧度可以省略。即 $1=(\frac{180}{\pi})°$

注意：

π不論用在什麼場合，它的近似值爲 3.1416，當π用在角度時，由於是省略弧度，才會變成 180°，即

π弧度≒3.1416(弧度)≒3.1416×(1 弧度)≒3.1416×($57°17'45''$)=180°

例如：

$\pi°$表 3.1416°⇒$\pi°$小於一直角。但π (單位故意不寫)表 180°，$\pi°\neq\pi$弧度。

書寫上，如果一個數字沒有加度或°，我們都視爲是弧度，即$x°\neq x$因此在角度符號上使用要特別注意。

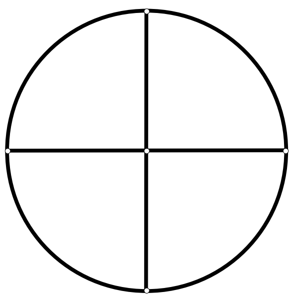
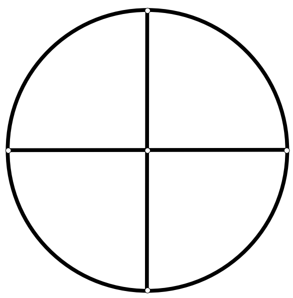
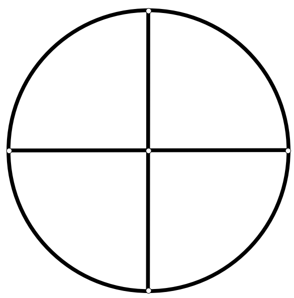
結論：

(a) x弧度相當於y° ⇔ $\frac{x}{\pi}=\frac{y}{180}$。

①度化弧度⇒去度“°”，乘以$\frac{\pi}{180°}$即可。 ②弧度化度⇒乘$\frac{180°}{\pi}$

(b) 象限角的情形

①度度量 ②弧度制 ③弧度制的近似值

[例題1] 試問 45°，120°與 330°分別爲多少弧度？

[分析]：設 x°可以換算成 y 弧度，利用關係式$\dfrac{x}{y}=\dfrac{180}{\pi}$，$y=x(\dfrac{\pi}{180})$，

所以 x°可以換成 $x(\dfrac{\pi}{180})$弧度。

[解法]：

$45^\circ=(45\cdot\dfrac{\pi}{180})$弧度$=\dfrac{\pi}{4}$弧度，

$120^\circ=(120\cdot\dfrac{\pi}{180})$弧度$=\dfrac{2\pi}{3}$弧度，

$330^\circ=(330\cdot\dfrac{\pi}{180})$弧度$=\dfrac{11\pi}{6}$弧度。

[例題2] 試問$\dfrac{3\pi}{4}$弧度與 2 弧度分別爲多少度？

[解法]：

$\dfrac{3\pi}{4}$弧度$=\dfrac{3\pi}{4}\cdot\dfrac{180^\circ}{\pi}=135^\circ$，

2 弧度$=2\cdot\dfrac{180^\circ}{\pi}=\dfrac{360^\circ}{\pi}\doteqdot 114.59^\circ$．

(練習1)完成下表中的角度單位的互換：

度	10°	15°	18°		45°	60°		90°	120°	135°
弧度				$\dfrac{\pi}{6}$			$\dfrac{5\pi}{12}$			
度	150°	180°	210°	225°	240°	270°		315°		360°
弧度							$\dfrac{5\pi}{3}$		$\dfrac{11\pi}{6}$	

(練習2)將下列各弧度化爲度數：

(1)$\dfrac{5\pi}{6}$ (2)-2(弧度) (3)$\dfrac{\pi+1}{6}$ Ans：(1)150° (2)$-\dfrac{360^\circ}{\pi}$ (3)$30^\circ+\dfrac{30^\circ}{\pi}$

(練習3)在直角坐標上，(cos4，tan6)所表的點 P 在那一個象限？
Ans：第三象限

(練習4)下列最大的數爲？
(A) sin1 (B) sin2 (C) sin3 (D) sin4 (E) sin5。Ans：(B)

(3)常用三角函數角度化簡關係：

(a) $\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}(2n\pi+\theta)$

$=\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}(\theta)$

(b) $\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}(\pi\pm\theta，2\pi\pm\theta)$

$=\pm\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}(\theta)$

(c) $\boxed{\sin，\cos，\tan，\cot，\sec，\csc}(\frac{\pi}{2}\pm\theta，\frac{3\pi}{2}\pm\theta)$

$=\pm\boxed{\cos，\sin，\cot，\tan，\csc，\sec}(\theta)$

[例題3] 設 $\sin\theta=\frac{-4}{5}$，且θ為第四象限角，試求下列各值：

(1)$\cos\theta$ (2)$\tan(\pi+\theta)$ (3)$\sec(\pi-\theta)$ (4)$\cot(\pi-\theta)$。

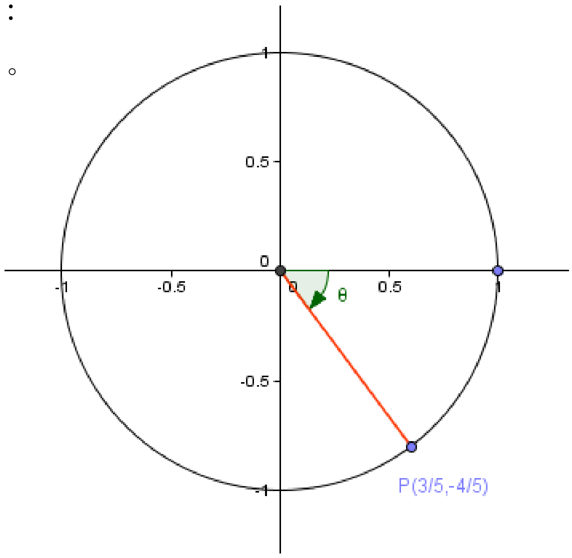
[解法]：

(1)如右圖，根據定義可以得知 $\cos\theta=\frac{3}{5}$。

(2)$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta=\frac{-4}{3}$。

(3)$\sec(\pi-\theta)=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta=\frac{-5}{3}$。

(4)$\cot(\pi-\theta)=\frac{1}{\tan(\pi-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta=\frac{3}{4}$。



(練習5)請問下列關係何者正確？

(A)$\sin(180-\theta)=\sin\theta$(B)$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ (C)$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$

(D)$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$(E)$\sin(\theta+360)=\sin\theta$。Asns：(B)(C)(D)

(練習6)設 $\cos\theta=\frac{-1}{3}$，且θ為第二象限角，試求下列各值：

(1)$\sec(\pi+\theta)$ (2)$\sin(\pi-\theta)$ (3)$\cot\theta$。

Ans：(1)-3 (2)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (3)$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$

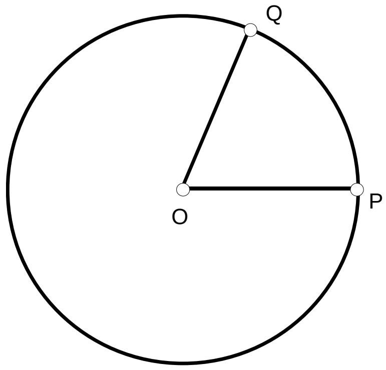
(4)扇形的弧長與面積：

(a)弧長公式與扇形面積公式：

若設有一圓O，其半徑為r，扇形OPQ中的圓心角∠POQ為θ(弧度)，

則①$\overset{\frown}{PQ}$ 的弧長$s=\cdot r\cdot\theta$ ②扇形OPQ的面積$A=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\cdot s$

注意：單位是弧度，而不是度



證明：

①因為弧長與圓心角大小成正比，

根據弧度的定義，可以得知$\overset{\frown}{PQ}$ 的弧長$s=\cdot r\cdot\theta$

②因為扇形面積與圓心角大小成正比，

$\frac{A}{\text{圓面積}}=\frac{\theta}{2\pi}\Rightarrow A=\frac{\theta}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\cdot s$。

例如：有一扇形，其半徑為 15 公分，圓心角為$\frac{\pi}{3}$，試求面積與其弧長。

解答：弧長$=15\cdot\frac{\pi}{3}=5\cdot\pi$(約 15.7 公分)　面積$=\frac{1}{2}(15)^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{225}{6}\cdot\pi$(約 117.81 公分)

結論：半徑為r，中心角為θ 弧度之扇形(POQ)

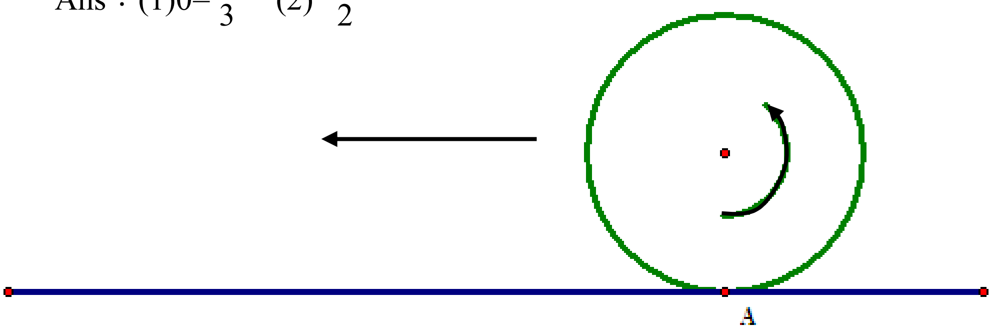
(1)弧長$L=r\cdot\theta$

(2)周長$=2\cdot r+r\cdot\theta$

(3)面積$=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\theta=\frac{1}{2}\cdot r\cdot L$

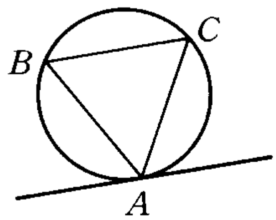
[例題4] 有一直徑為 30 公分的滾輪，它與地面接觸於 A 點，現在讓它在地上自 A 點逆時針滾動 $20\cdot\pi$公分的長度，設此時 A 點滾動了θ弧度，試回答下列各小題：(1)θ的值等於多少？(2)A 點離地面幾公分？

Ans：(1)$\theta=\frac{4\pi}{3}$　(2) $\frac{45}{2}$



(練習7)有一個輪子，半徑 50 公分，讓它在地上滾動 200 公分的長度，
問輪子繞軸轉動________度。(度以下四捨五入) (88 學科)
Ans：229°

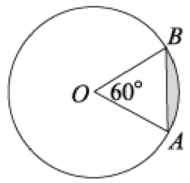
(練習8)如圖，有一輪子，直徑 80 公分，外接於一正△ABC，



切地面於 A。讓它向右滾動，則$\overline{BC}$於下一次平行地面時，
輪子繞軸轉動了【 】弧度，
此時輪子向右滾動了【 】公分。Ans：π，40π

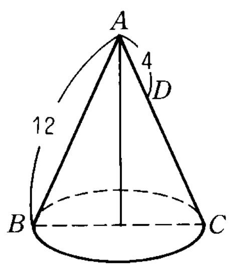
(練習9)若一扇形周長等於所在圓的周長，則扇形的中心角為________。
Ans：2π−2

(練習10)如右圖，圓C的圓心為O，半徑為 1，$\angle AOB=60°$，



則陰影部分的面積為__________。Ans：$\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(練習11)如圖的直圓錐，$\overline{AB}=12$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=4$，
若 C 處有一隻螞蟻，則：
(1)繞一圈又回到 C 的最短路線長為【 】。
(2)繞一圈至 D 的最短路線長為【 】。
Ans：(1)$12\sqrt{2}$(2)$4\sqrt{10}$



(乙)三角函數的圖形

前面單元介紹了指數與對數的意義，據此可以定義指數與對數函數。同樣的，知道了廣義角的正餘弦、正餘切、正餘割的定義，也可以定義正餘弦、正餘切、正餘割函數，這六個函數通稱為「**三角函數**」。

以正弦函數為例，將廣義角 x 對應到到 $\sin x$ 的函數，就稱為**正弦函數**。
同樣的想法，也可以定義出其它五個三角函數。即

餘弦函數：$x\rightarrow \cos x$

正切函數：$x\rightarrow \tan x$

餘切函數：$x\rightarrow \cot x$

正割函數：$x\rightarrow \sec x$

餘割函數：$x\rightarrow \csc x$

在前一段中，我們介紹了廣義角的另一個單位—弧度，而且還強調角度為 x 弧度時可以把單位省略不寫。對於任一個實數 x，必有一個 x 弧度的廣義角與它對應。因此，可將三角函數看成是由實數對應到實數的函數。換句話說，對於任意實數 x，我們先取 x 弧度的角，然後再對應到此角的三角函數值。

例如：對於實數$\frac{\pi}{6}$而言，$\sin\frac{\pi}{6}$是代表$\frac{\pi}{6}$弧度角的正弦值。用函數的角度來看，$\frac{\pi}{6}$經由正弦函數對應到$\frac{1}{2}$，即$\frac{\pi}{6}\xrightarrow{\sin}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$。

要討論三角函數的圖形時，習慣上，會將變數用弧度來表示，接下來我們將要討論三角函數的圖形與性質：

(1)正弦函數：y=sin$x$

(a)正弦函數的圖形：

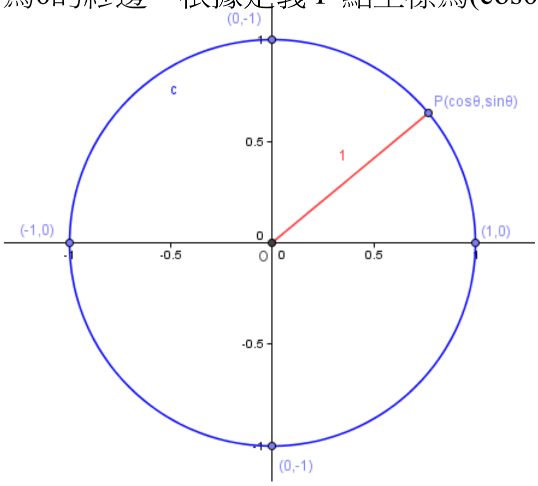
首先我們用描點法描繪正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形：

因為對於任意實數 x，恆有 $\sin(2\pi+x)=\sin x$，所以先描繪區間 $0\le x\le 2\pi$ 上正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，先求出某些特殊的 x 值所對應的 $\sin x$ 值，並列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

x	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

接下來，可以根據廣義角正弦值的定義，來討論正弦函數 $y=\sin x$ 在 $0\le x\le 2\pi$的圖形變化。如下圖，以原點 O 為圓心，作一單位圓，令廣義角$\theta(0\le\theta\le 2\pi)$是標準位置角，P 在圓上，且 $\overrightarrow{OP}$ 為θ的終邊，根據定義 P 點坐標為$(\cos\theta,\sin\theta)$，即 $\sin\theta$為 P 點的 y 坐標。

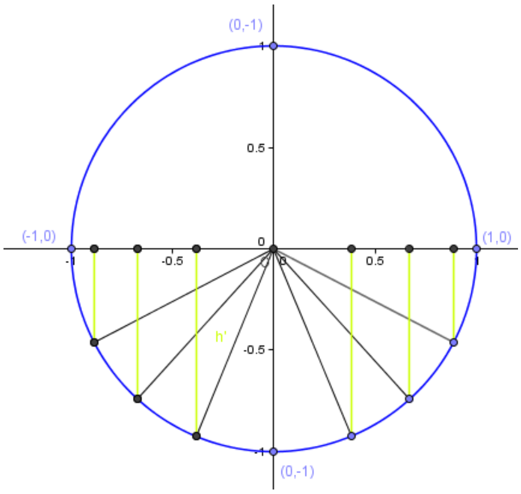


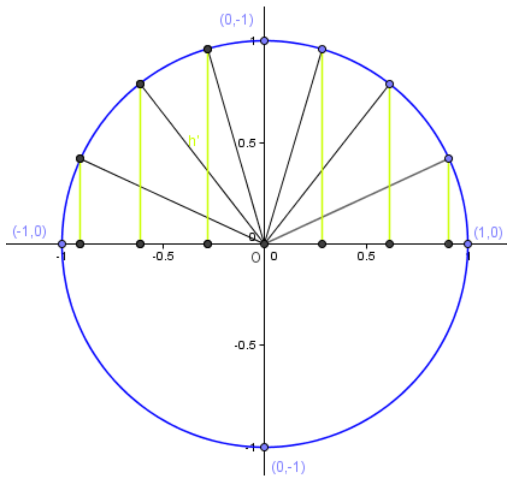
當θ從 0 增加到$\frac{\pi}{2}$時，P 點的 y 坐標 sinθ從 0 逐漸增加到 1。

當θ從$\frac{\pi}{2}$增加到π時，P 點的 y 坐標 sinθ從 1 逐漸減少到 0。

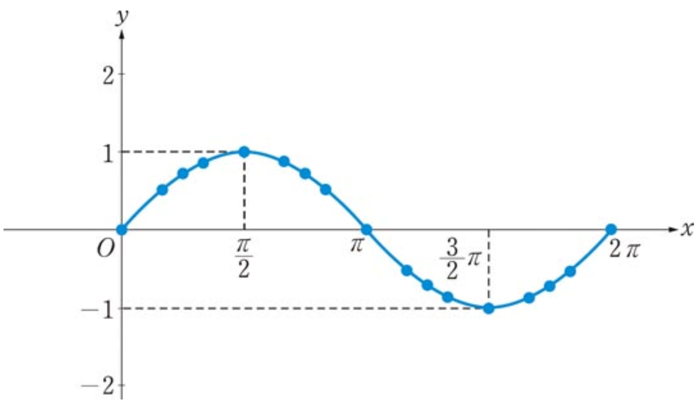
當θ從π增加到$\frac{3\pi}{2}$時，P 點的 y 坐標 sinθ從 0 逐漸減少到−1。

當θ從$\frac{3\pi}{2}$增加到 2π時，P 點的 y 坐標 sinθ從−1 逐漸增加到 1。

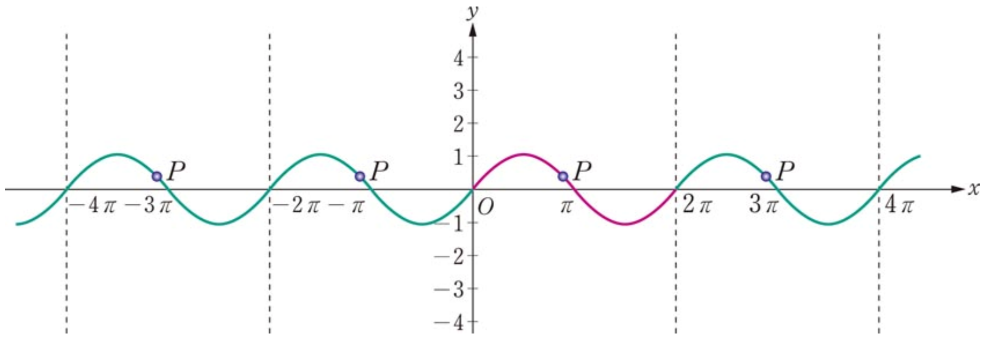




根據上述的圖形變化與特殊點(x,sin$x$)的描繪，然後依次用勻滑曲線將這些點連起來，便得到正弦函數 $y=\sin x(0\leq x\leq 2\pi)$的圖形，如下圖所示．



上述描點的動作不需要再重複作下去，因爲 $\sin(2\pi+x)=\sin x$，故 y=sin$x$ 在 $0\leq x\leq 2\pi$ 的圖形與在 $2\pi\leq x\leq 4\pi$的圖形兩者沒有兩樣，只是向右平移 2π而已。同樣的，因爲 $\sin(x+2n\pi)=\sin x$ (n 爲整數)，因此可以將 y=sin$x$ 在 $0\leq x\leq 2\pi$的圖形平移到 $2n\pi\leq x\leq 2(n+1)\pi$ 的範圍內，將這些圖形相連接就構成正弦函數類似波浪形的圖形，如下圖所示。



(**b**)正弦函數與其圖形的特性：

根據前面正弦函數圖形的畫法，正弦函數的圖形每隔 2π單位就會重複出現，這是正弦函數很重要的特性。其實其它的三角函數同時也具有這樣的特性，其實這一類的函數都是典型的「**週期函數**」。

週期函數： 一般而言，一個函數 $y=f(x)$ ，若可找到固定的正數 T，使得自變數 x 在取值範圍內的每一個 x，恆有 $f(x+T)=f(x)$，我們就稱這個函數為一**週期函數**．如果又可找到滿足上述性質的最小正數 p，我們就稱此週期函數的週期為 p．

例如：

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$，即 $T=2k\pi$，當 $k=1$ 時，滿足條件的最小正整數 $p=2\pi$。因此正弦函數 $y=\sin x$ 為週期函數且週期為 2π。

綜合以上的討論，正弦函數 $y=\sin x$ 有下列性質：

(1)定義域與值域：

對任意實數 x，$\sin x$ 都有意義，所以正弦函數 $y=\sin x$ 的定義域為 R。

正弦函數 $y=\sin x$ 的應變數 y 的範圍為 $-1\leq y\leq 1$．故值域為$[-1,1]$。

(2)週期性：

正弦函數 $y=\sin x$ 為週期函數且週期為 2π。

(3)振幅：

因為$-1\leq\sin x\leq 1$，所以正弦函數 $y=\sin x$ 的最大值為 1，最小值為-1，其圖形以 x 軸為基準，函數值在-1 與 1 之間來回震盪，最高到 1，最低到-1，我們稱

「1 為正弦函數 $y=\sin x$ 的**振幅**」。

(4)對稱性：

①正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於通過圖形最高點的鉛直線。(直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 、$x=\dfrac{5\pi}{2}$等)．

②正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於通過圖形最低點的鉛直線。(直線 $x=\dfrac{3\pi}{2}$ 、$x=\dfrac{-\pi}{2}$等)．

③正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於圖形與 x 軸的交點$(n\pi,0)$。

(5)奇偶性：

正弦函數 $y=\sin x$ 為奇函數。即 $\sin(-x)=-\sin x$。

綜合以上的討論，正弦函數 $y=\sin x$ 有下列性質：

正弦函數的性質	**正弦函數圖形的性質**
(a)正弦函數 $y=\sin x$ 的定義域為 R。 (b)正弦函數 $y=\sin x$ 的值域為 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$，即 $-1\le \sin x\le 1$，最大值=1，最小值=−1。 (c)正弦函數 $y=\sin x$ 為奇函數。即 $\sin(-x)=-\sin x$。	(a)圖形的對稱中心為 $(n\pi,0)$，圖形的對稱軸為 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，k 為整數。 (b)圖形與 x 軸的交點 $(n\pi,0)$，圖形與 y 軸的交點 $(0,0)$。 (c)正弦函數 $y=\sin x$ 的週期為 2π。 (d)正弦函數 $y=\sin x$ 的振幅為 1

如同 $y=x^2$ 的圖形可以透過平移、伸縮得到與 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形亦可以透過平移、伸縮而得到 $y=a\sin(bx-h)+k$ 的圖形。

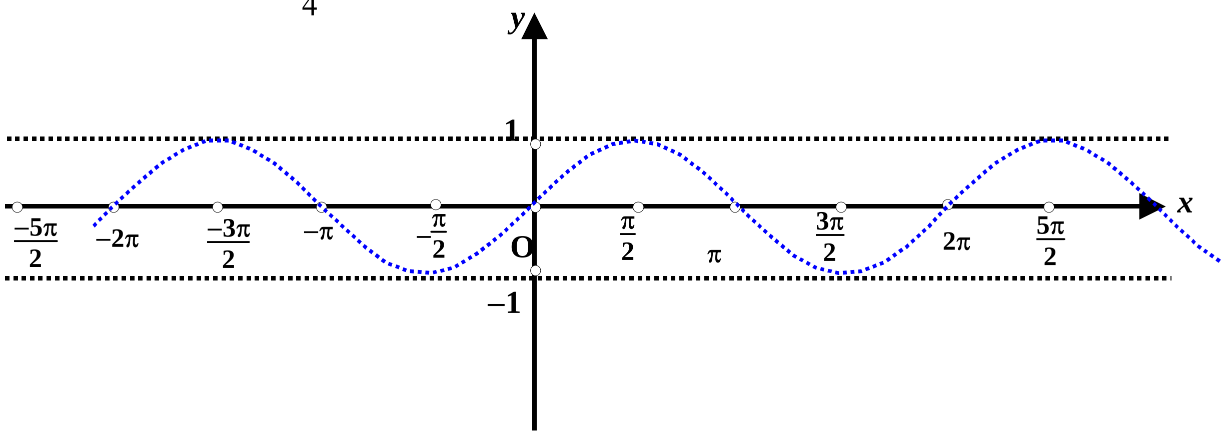
[例題5]　【平移法作圖問題⇒作 $y=\sin(x-\theta)+b$ 的圖形】

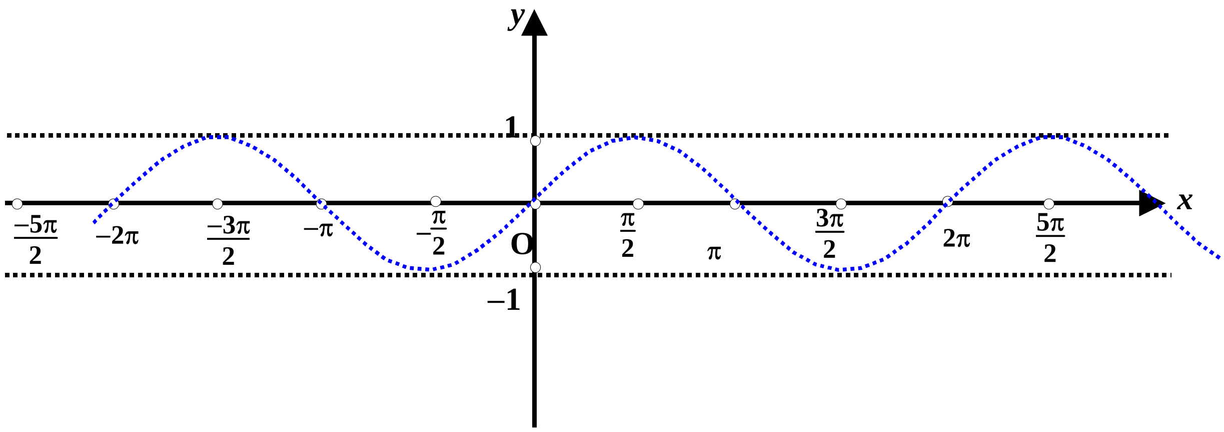
Step1：先作基本圖形 $y=\sin x$

Step2：上下平移 b 單位　Step3：左右平移θ單位

試利用正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形，並討論其週期、最大值與最小值。

(1)$y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$　　(2)$y=2+\sin x$





[例題6] 【伸縮法作圖問題⇒作 y=a sinkx 的圖形】

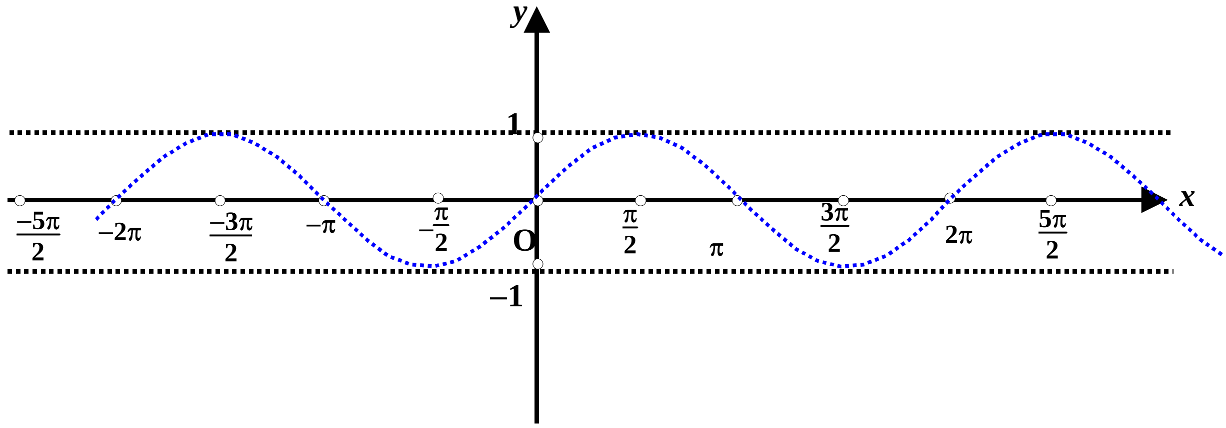
Step1：先作基本圖形 y=sin$x$

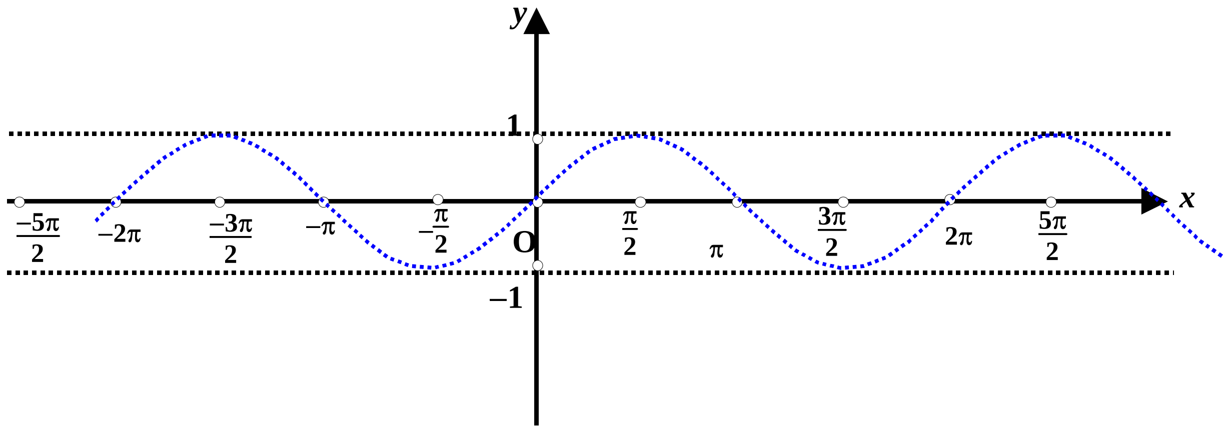
Step2：y=sin$x$ 上每一點的縱坐標乘以 a (a>0)

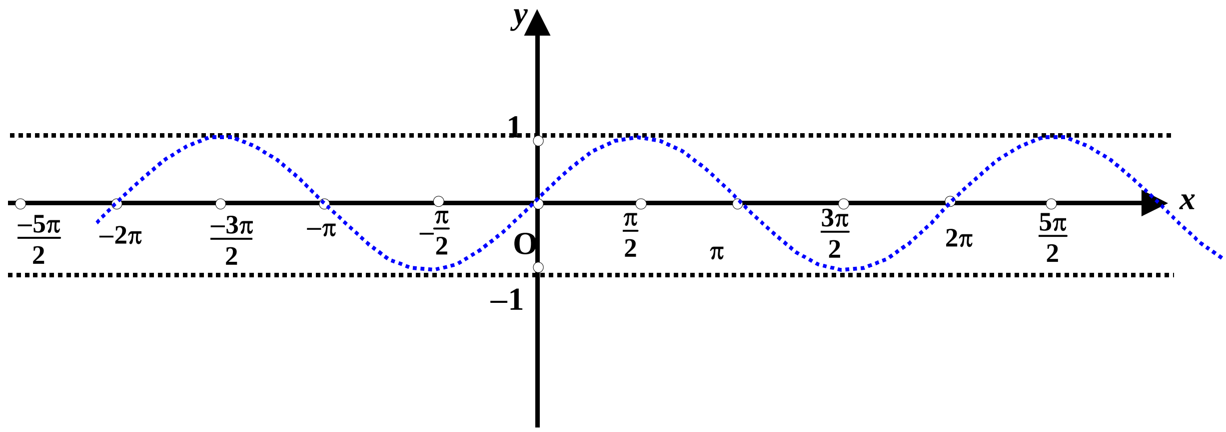
Step3：每一點的橫坐標乘以 $\frac{1}{k}$。

試利用正弦函數 y=sin$x$ 的圖形，描繪下列各三角函數的圖形。

(1)y=2sin$x$　(2)y=sin3x　(3)y=3sin2x







根據前面例題的討論，我們可以歸納出以下的結論：

(1)$y=\sin x \xrightarrow{\text{水平平移}} y=\sin(x-h) \xrightarrow{\text{鉛直平移}} y=\sin(x-h)+k$

$h>0$ 向右平移 h 單位；$h<0$ 向左平移$|h|$單位

$k>0$ 向上平移 k 單位；$k<0$ 向下平移$|k|$單位

函數 $y=\sin(x-h)+k$ 的週期爲π，振幅爲 1。

(2)$y=\sin x \xrightarrow{\text{鉛直伸縮}a\text{倍}} y=a\sin x(a>0)$
函數 $y=a\sin x(a>0)$的圖形週期爲 2π，振幅爲 a。

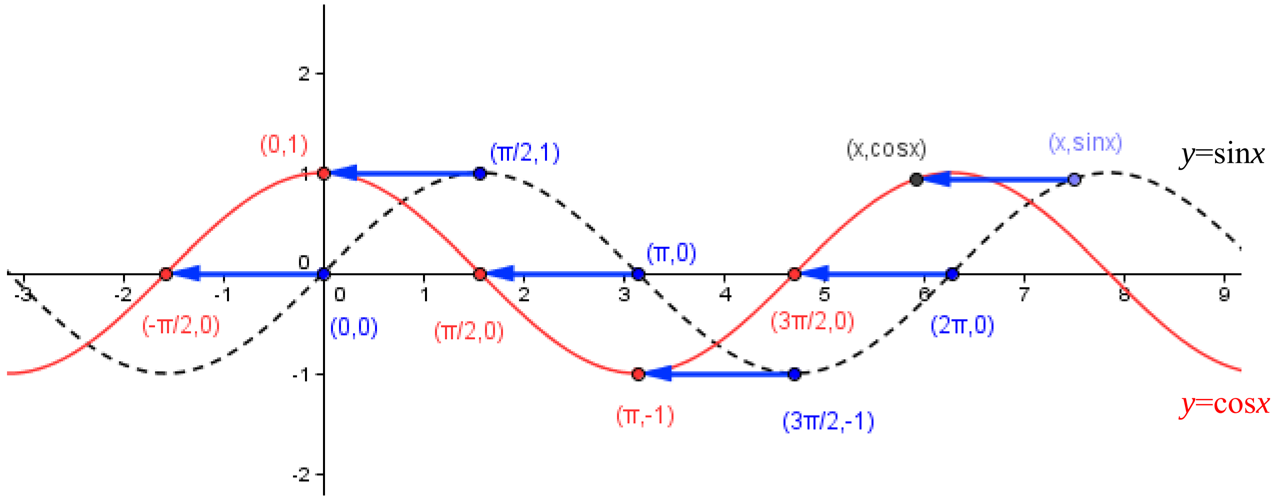
(3) $y=\sin x \xrightarrow{\text{水平伸縮}\frac{1}{b}\text{倍}} y=\sin bx(b>0)$

函數 $y=\sin bx(b>0)$的圖形週期爲$\dfrac{2\pi}{b}$，振幅爲 1。

(2)餘弦函數 $y=\cos x$：

(a) 餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形

要討論餘弦函數圖形的特性，我們特別注意到 $\sin(x+\dfrac{\pi}{2})=\cos x$ 這個關係，因此 $y=\sin x$ 的圖形向左平移$\dfrac{\pi}{2}$單位即可得到 $y=\cos x$ 的圖形。



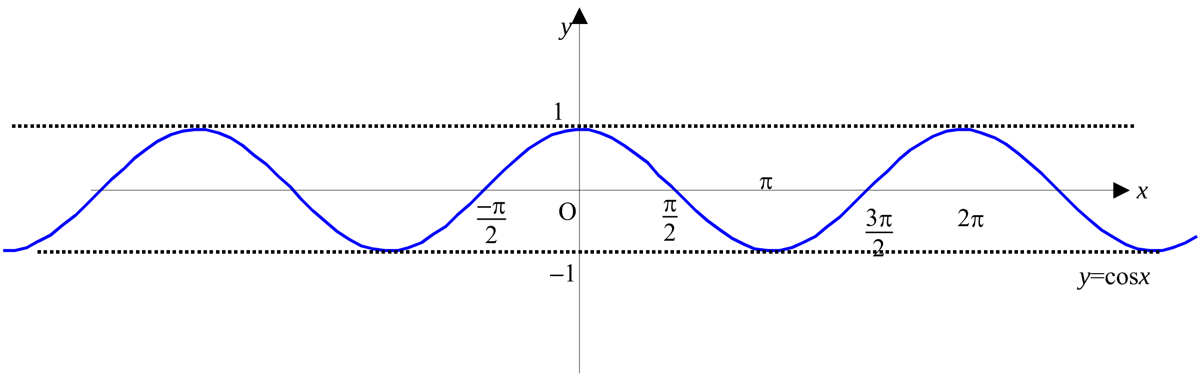
由於 $y=\cos x$ 的圖形可以由 $y=\sin x$ 的圖形經由平移產生，故正餘弦函數 $y=\sin x$ 與 $y=\cos x$ 的性質，大致上都類似，我們將餘弦函數 $y=\cos x$ 的性質整理如下：

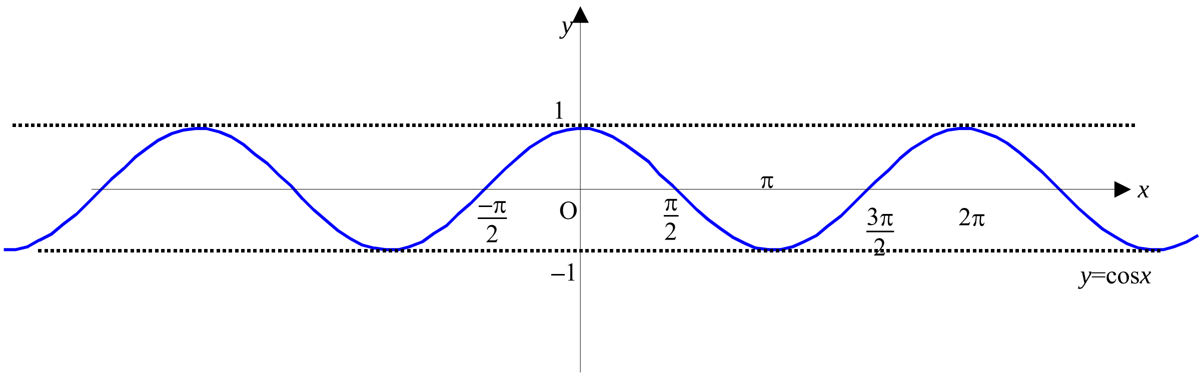
(b) 餘弦函數與其圖形的特性：

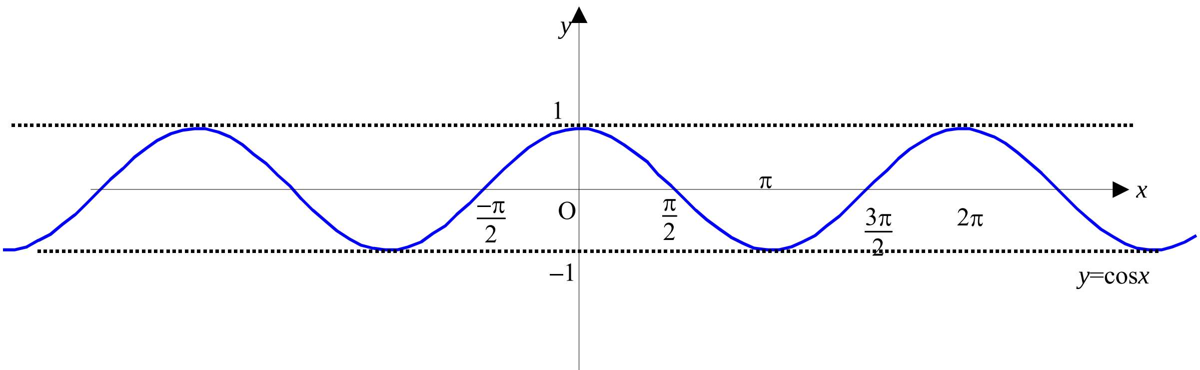
餘弦函數的性質	餘弦函數圖形的性質
(a)餘弦函數 y=cos$x$ 的定義域爲 R。 (b)餘弦函數 y=cos$x$ 的值域爲 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$，即$-1\le \sin x\le 1$，最大值=1，最小值=-1。 (c)餘弦函數 y=cos$x$ 爲偶函數。即 $\cos(-x)=\cos x$。	(a) 圖形的對稱中心爲$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$，圖形的對稱軸爲 $x=n\pi$，n 爲整數。 (b) 圖形與 x 軸的交點$(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)$，圖形與 y 軸的交點(0,1)。 (c)餘弦函數 y=cos$x$ 的週期爲 2π。 (d)餘弦函數 y=cos$x$ 的振幅爲 1 (e)y=cos$x$ 的圖形是由 y=sin$x$ 的圖形向左平移$\frac{\pi}{2}$單位所成的圖形。

(練習12)試利用正弦函數 $y=\cos x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形，並求函數的週期與振幅。

(1)$y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$　　(2) $y=\frac{1}{3}\cos x$　　(3) $y=\cos 2x$







(3)正切函數 y=tan$x$

(a)正切函數 y=tan$x$ 的圖形：

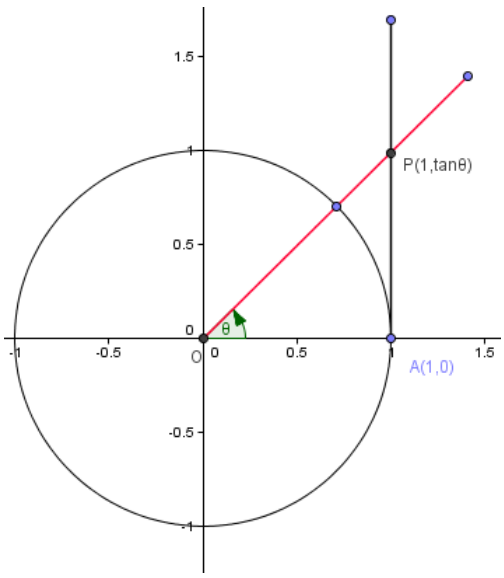
因爲對於任意實數 x，恆有 $\tan(\pi+x)=\tan x$，且正切函數 y=tan$x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 及 $x=\frac{-\pi}{2}$處沒有定義，所以只要描繪區間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 上正切函數 $y=\tan x$ 的圖形，然後沿著 x 軸逐次向右或向左平移π 單位，即可得出 $y=\tan x$ 的全部圖形．

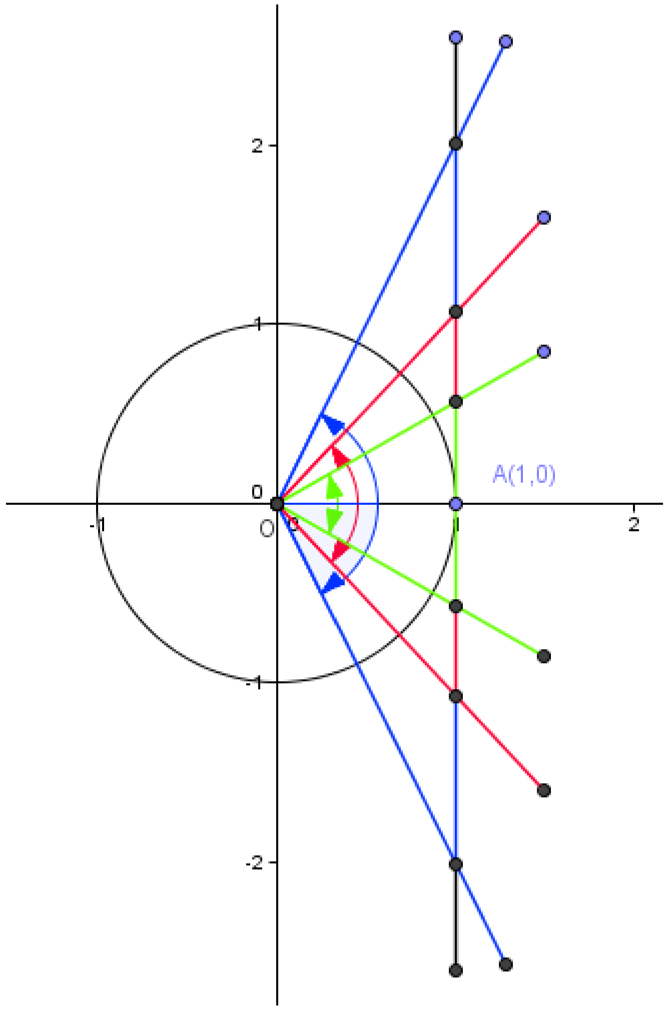
我們先討論正切函數 y=tan$x$ 在區間 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 內函數值的變化：

如下圖所示，設介於$\frac{-\pi}{2}$與$\frac{\pi}{2}$間的廣義角θ位於標準位置，A 坐標爲(1,0)，過 A 對單位圓 O 作切線交射線 OP 於 P 點，P 點的坐標爲(1,tanθ)，即 P 點的 y 坐標爲 tanθ。

當θ由 0 逐漸增加而接近$\frac{\pi}{2}$時，P 點的 y 坐標 tanθ從 0 逐漸增加而愈來愈大無界限。

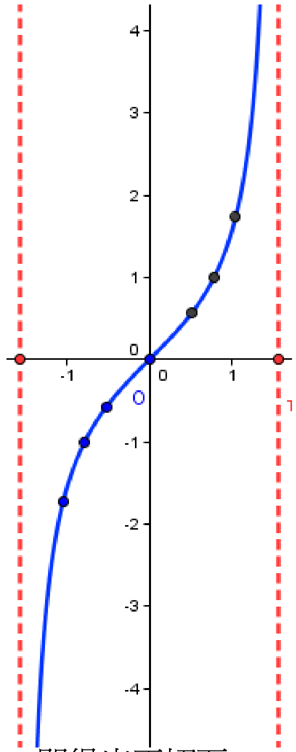
當θ由 0 逐漸減少而接近$\frac{-\pi}{2}$時，P 點的 y 坐標 tanθ從 0 逐漸減少而愈來愈小無界限。。





因此當 x 從 0 增加而接近$\frac{\pi}{2}$時，點(x,tan$x$)會從原點(0,0)開始上升，當 x 愈接近$\frac{\pi}{2}$時，

點$(x,\tan x)$會愈接近直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$；當 x 從 0 減少而接近$\dfrac{-\pi}{2}$時，點$(x,\tan x)$會從原點$(0,0)$開始下降，當 x 愈接近$\dfrac{-\pi}{2}$時，點$(x,\tan x)$會愈接近直線 $x=\dfrac{-\pi}{2}$。

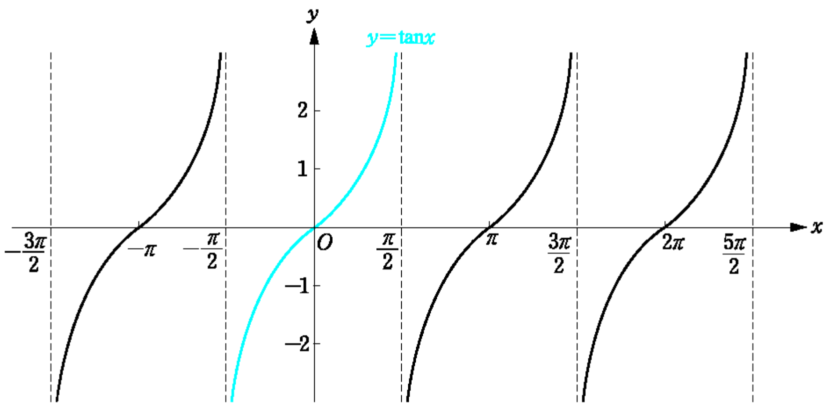


接下來，我們求出某些特殊的 x 值所對應的 $\tan x$ 值，並列表如下：將對應的點用均勻的曲線依次連接，並配合圖形的變化情形，

可以得到正切函數 $y=\tan x$ 在 $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 的圖形。

x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y=\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

最後再將 $y=\tan x(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2})$這個圖形逐次向右、向左平移π 單位，即得出正切函數 $y=\tan x$ 的全部圖形，如下圖所示。



(b) 正切函數與其圖形的特性：

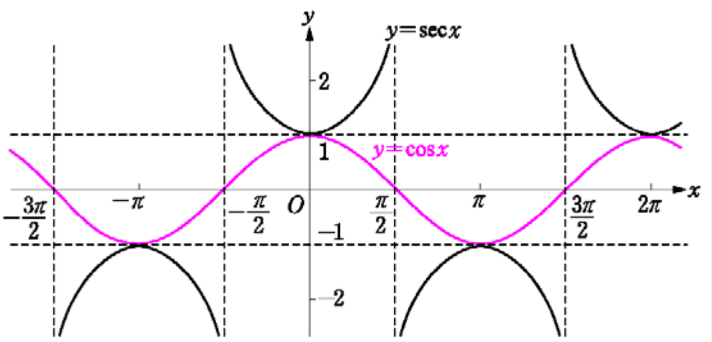
正切函數的性質	**正切函數圖形的性質**
(a) 正切函數 $y=\tan x$ 的定義域 為$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k$ 為整數，$x\in R\}$。 (b)正切函數 $y=\tan x$ 的值域為 R。 (c)正切函數 $y=\tan x$ 的週期為π。 (d)正切函數 $y=\tan x$ 為奇函數。 即 $\tan(-x)=-\tan x$。	(a)圖形的對稱中心為$(n\pi,0)$。 (b)圖形與 x 軸的交點$(n\pi,0)$， 圖形與 y 軸的交點$(0,0)$。 (c)圖形在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$(k 為整數)處不連續。 (d)圖形的漸近線：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，k 為整數。

(4) 正割、餘割與餘切函數的圖形

因爲廣義角θ的正割、餘割與餘切定義爲餘弦、正弦與正切的倒數，因此當我們已經對於餘弦、正弦與正切的性質有一些認識時，就可以進一步討論其餘這三個三角函數的圖形與性質。

一、正割函數：$y=\sec x$

由倒數關係可知，當 $\cos x\neq 0$ 時，正割函數 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，因此由餘弦函數 $y=\cos x$ 的圖形，就可以得到 $y=\sec x$ 的大概圖形如下：

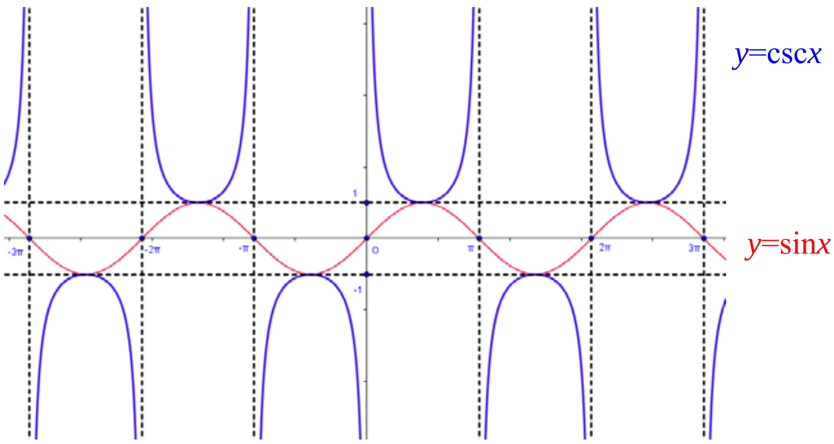


正割函數 $y=\sec x$ 的性質我們整理如下：

正割函數的性質	**正割函數圖形的性質**
(a) 正割函數 $y=\sec x$ 的定義域爲 $\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, k 爲整數，$x\in R\}$。 (b) 正割函數 $y=\sec x$ 的值域爲 $\{y\mid y\geq 1$ 或 $y\leq -1\}$。$\lvert\sec x\rvert\geq 1$ (c)正割函數 $y=\sec x$ 爲偶函數。即 $\sec(-x)=\sec x$。	(a)圖形的對稱軸爲 $x=n\pi$，n 爲整數。 (b)圖形的漸近線：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，k 爲整數。 (c)圖形在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$(k 爲整數)處不連續。 (d)正割函數 $y=\sec x$ 的週期爲 2π。

二、餘割函數：$y=\csc x$

由倒數關係可知，當 $\sin x\neq 0$ 時，餘割函數 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，因此由正弦函數 $y=\sin x$ 的圖形，就可以得到 $y=\csc x$ 的大概圖形如下：

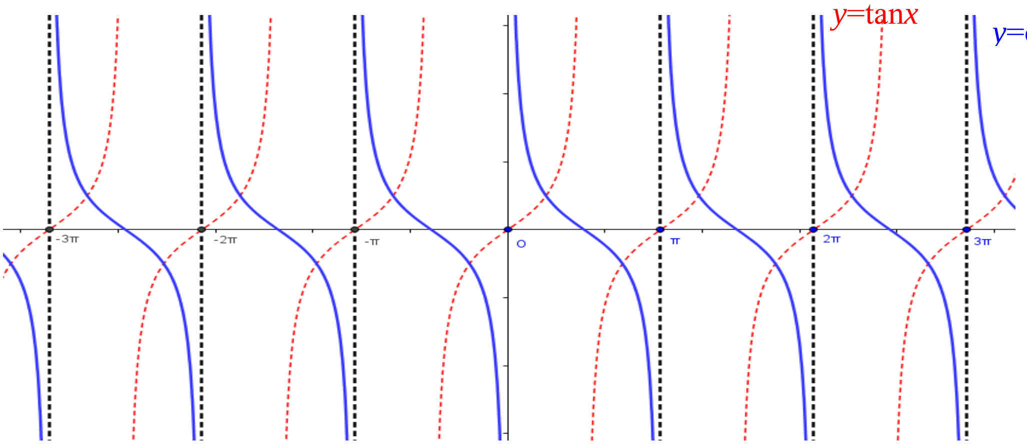


正割函數 y=csc$x$ 的性質我們整理如下：

餘割函數的性質	**餘割函數圖形的性質**
(a) 正割函數 y=csc$x$ 的定義域為 $\{x \mid x\neq k\pi,\ k$ 為整數，$x\in R\}$。 (b) 正割函數 y=csc$x$ 的值域為 $\{y \mid y\geq 1$ 或 $y\leq -1\}$。$\lvert \csc x\rvert\geq 1$ (c)正割函數 y=csc$x$ 為奇函數。 即 $\csc(-x)=-\csc x$。	(a)圖形的對稱軸為，$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$。 (b)圖形的漸近線：$x=k\pi$，k 為整數。 (c)圖形在 $x=k\pi$(k 為整數)處不連續。 (d)正割函數 y=csc$x$ 的週期為 2π。

三、餘切函數：y=cot$x$

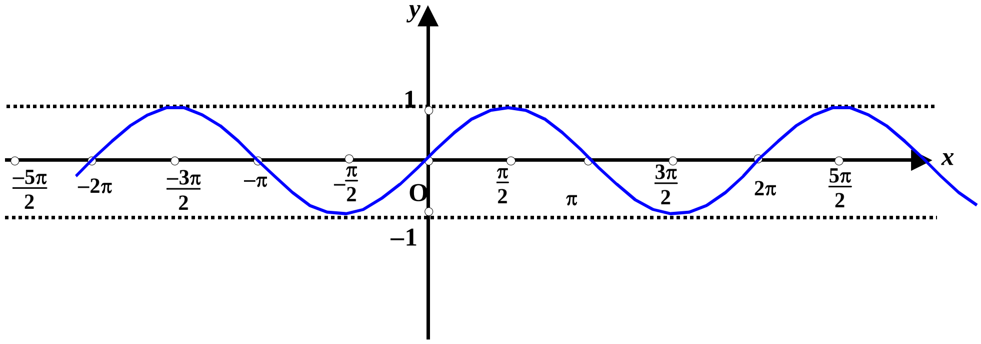
由倒數關係可知，當 tan$x\neq 0$ 時，餘切函數 $y=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$，因此由正切函數 y=tan$x$ 的圖形，就可以得到 y=cot$x$ 的大概圖形如下：



餘切函數 y=cot$x$ 的性質我們整理如下：

餘切函數的性質	**餘切函數圖形的性質**
(a)餘切函數 y=cot$x$ 的定義域為 $\{x \mid x\neq k\pi,\ k$ 為整數，$x\in R\}$。 (b)餘切函數 y=cot$x$ 的值域為 R。 (c)餘切函數 y=cot$x$ 的週期為π。 (d)餘切函數 y=cot$x$ 為奇函數。 即 $\cot(-x)=-\cot x$。	(a)圖形的對稱中心為$(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,0)$。 (b)圖形與 x 軸的交點$(\dfrac{\pi}{2}+k\pi,0)$。 (c)圖形在 $x=k\pi$(k 為整數)處不連續。 (d)圖形的漸近線：$x=k\pi$，k 為整數。

[例題7] 若 $\sin x \le \frac{-1}{2}$ 且 $-2\pi \le x \le 2\pi$，求 x 的範圍。 Ans：$\frac{-5\pi}{6} \le x \le \frac{-\pi}{6}$ 或 $\frac{7\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$



[例題8] (1)試求 $y=\sin x$ 在 $-\pi \le x \le 3\pi$ 的圖形與水平線 $y=\frac{1}{2}$ 的交點個數。

(2)試求方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 在 $-\pi \le x \le 3\pi$ 的範圍內實根的個數。

[解法]：

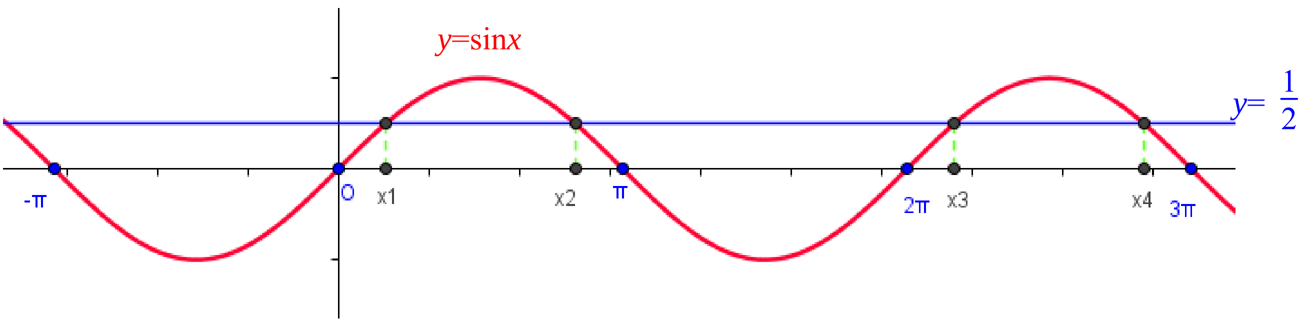
(1)如下圖，畫出 $y=\sin x$ 在區間 $-\pi \le x \le 3\pi$ 的圖形，它與 $y=\frac{1}{2}$ 會有 4 個交點。

(2)因為「方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 在 $-\pi \le x \le 3\pi$ 的範圍內實根的個數」與「$y=\sin x$ 在區間 $-\pi \le x \le 3\pi$ 的圖形與直線 $y=\frac{1}{2}$ 的交點數」相等，且交點的 x 坐標就是方程式的實根。

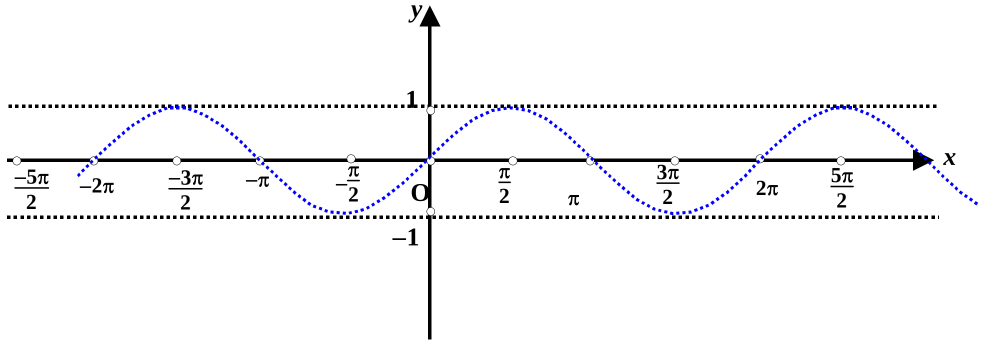
如下圖可知，$y=\sin x$ 在區間 $-\pi \le x \le 3\pi$ 的圖形與直線 $y=\frac{1}{2}$ 有 4 個交點，所以方程式 $\sin x=\frac{1}{2}$ 在 $-\pi \le x \le 3\pi$ 的範圍內有 4 個實根。

我們進一步利用正弦的定義可以求得 4 個交點的 x 坐標(方程式的 4 個實根)為

$x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，$x_3=2\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{13\pi}{6}$，$x_4=3\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{17\pi}{6}$。



[例題9] 試繪出函數 $f(x)=\sin x-|\sin x|$



[例題10] 求下列各三角函數的週期：

(1)$f(x)=\sin 2x$　(2)$f(x)=2-\tan 3x$　(3)$f(x)=|\sin x|$

Ans：(1)π　(2)$\frac{\pi}{3}$　(3)π

結論：

(1)正弦、餘弦、正割、餘割函數的週期爲 2π。正切、餘切函數的週期爲π。

(2)設 F 表 sin，cos，sec，csc 中某一個函數，

則(a)形如 $a\mathrm{F}(kx+b)+c$ 的函數週期爲$\frac{2\pi}{k}$，其中 a,b,c 爲實數，k 爲正實數。

(b)形如$|\mathrm{F}(kx+b)|$的函數週期爲$\frac{\pi}{k}$。

(3)設 F 表 tan，cot 中之某一個函數，

則(a)形如 $a\mathrm{F}(kx+b)+c$ 的週期爲$\frac{\pi}{k}$，其中 a,b,c 爲實數，k 爲正實數。

(b)形如$|\mathrm{F}(kx+b)|$的函數週期爲$\frac{\pi}{k}$。

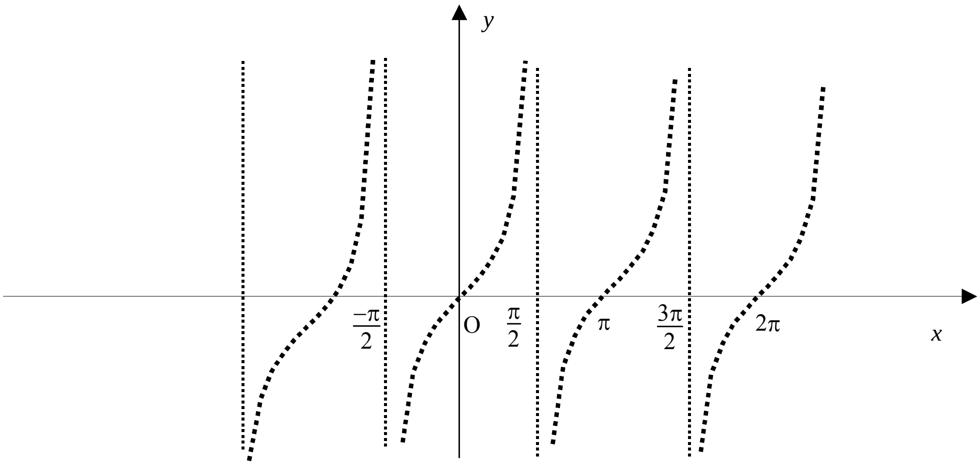
(練習13)(1) 若 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{3\pi}{4}$，則 $\sin x$ 的範圍爲何？

(2) 若 $\sin x\le\frac{-1}{2}$ 且 $0\le x\le 2\pi$，試求 x 的範圍。

Ans：(1) $\frac{1}{2}\le\sin x\le 1$　(2) $\frac{7\pi}{6}\le x\le\frac{11\pi}{6}$

(練習14)請求出函數 $y=3\sec(\frac{x}{4}+8)-12$ 的週期與振幅。　Ans：週期=8π，振幅=3

(練習15)請描繪 $y=|\tan x|$的圖形。

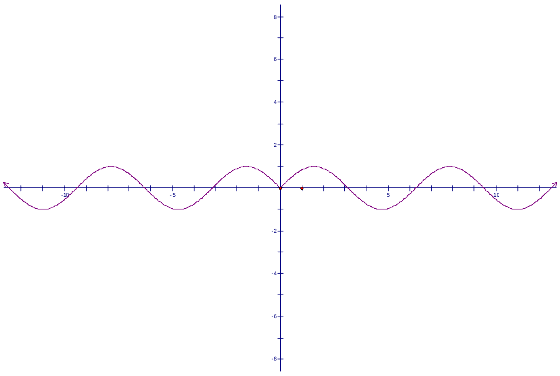


(練習16)請繪出函數 $f(x)=\cos x+|\cos x|$，並求出它的週期。 Ans：2π

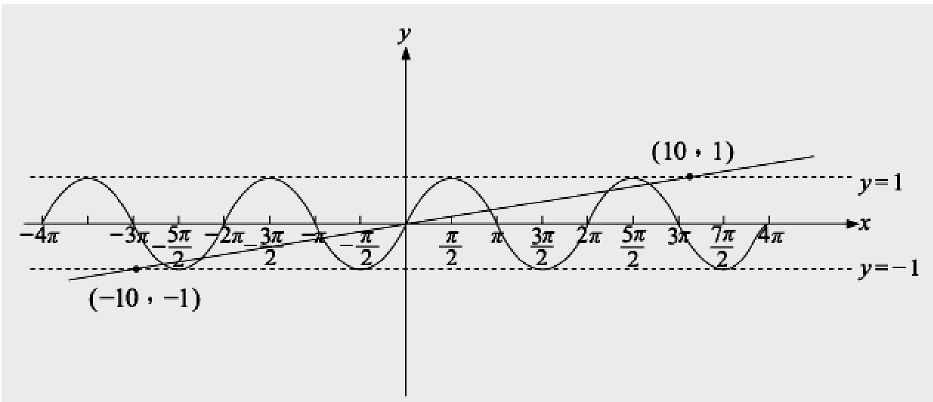
(練習17)請繪出 $y=|\cos x|$的圖形，並求出它的週期。 Ans：π

(練習18)求方程式 $\tan x=-x$ 在$-\pi<x<\pi$間解的個數。Ans：3

(練習19)請繪出 $y=\sin|x|$的圖形，並請問它是否爲週期函數？Ans：否



(練習20)求方程式 $10\sin x=x$ 有幾個實數解？(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 個。



綜合練習

(1) 下列敘述何者正確？

(A)$\sin 9.8>0$ (B)$\sin 9.8=\sin(3\pi-9.8)$ (C)$\sec\frac{\pi}{2}$ 無意義 (D)$(\csc 2,\cot 2)$在第四象限 (E)$\cos(\alpha-\pi)=\cos\alpha$。

(2) 設 $0\le x\le 2\pi$，$-1<k<0$ 是一個常數。已知 $y=k$ 和 $y=\sin x$ 的圖形交於兩點，此二點的 x 坐標和爲(A)0 (B)$\frac{\pi}{2}$ (C)3π (D)$\frac{3\pi}{2}$ (E)2π。(2004 大考中心研究用試題)

(3) 關於坐標平面上函數 $y=\sin x$ 的圖形和 $y=\frac{x}{10\pi}$的圖形之交點個數，下列那一個選項是正確的？
(1)交點的個數是無窮多
(2)交點的個數是奇數且大於 20
(3)交點的個數是奇數且小於 20
(4)交點的個數是偶數且大於或等於 20
(5)交點的個數是偶數且小於 20 (2007 學科)

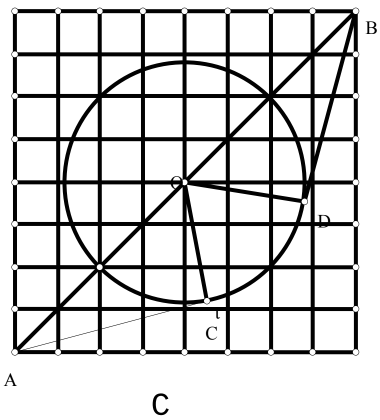
(4) 下列那些值是有意義的？

(A)$\sin 90$ (B)$\tan 90$ (C)$\sec\frac{\pi}{2}$ (D)$\cos 100^{\circ}$ (E)$\cos 100$。

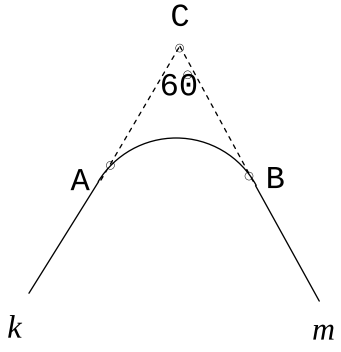
(5) 設 $a=\sin 1$，$b=\sin 2$，$c=\sin 3$，$d=\cos 4$，$e=\cos 5$ 請比較 a,b,c,d,e 的大小。

(6) 小萍拿一個周長爲 60 公分的輪子在地上滾動，它共滾動了 1 公尺 20 公分的長度，設輪子繞軸滾動了θ，求θ=？

(7) 如下圖所示，每個小方格的邊長爲 1，圓 O 的圓心爲 O，半徑爲$\frac{1}{2}\overline{OA}$；AC 與 BD 均爲圓 O 的切線，切點分別爲 C 點與 D 點。
(a)試求$\angle COD$ 。
(b)求線段$\overline{AC}$、圓弧$\overset{\frown}{CD}$及線段$\overline{BD}$的長度和。 (88 社)

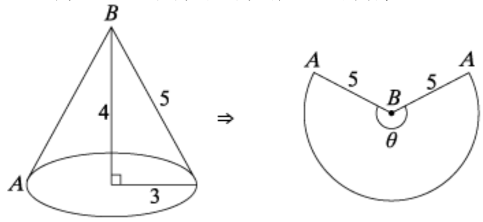


(8) 兩條公路 k 及 m，如果筆直延伸將交會於 C 處成 60°夾角，如圖所示。爲銜接此二公路，規劃在兩公路各距 C 處 450 公尺的 A、B 兩點間開拓成圓弧型公路，使 k , m 分別在 A,B 與此圓弧相切，則此圓弧長＝________公尺。(90 學科)(公尺以下四捨五入)
【 $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\pi\approx 3.142$】



(9) 設一扇形之周長為 10，則此扇形面積最大為何？此時中心角為何？

(10) 一直圓錐面底之半徑為 3，高為 4，若將此直圓錐沿一斜高剪開成一扇形，則中心角為________弧度。



(11) 正方形$ABCD$邊長為 2，分別以A，B，C為圓心，2 為半徑，在正方形內部作三個圓弧如下圖，則

(a)$\overset{\frown}{BPD}$與$\overset{\frown}{BQD}$兩弧圍成眼形區域面積為＝__________。

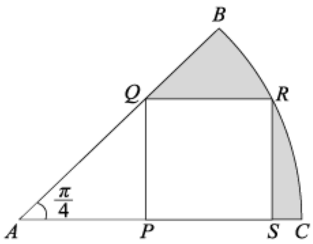
(b) $\overset{\frown}{BP}$ ，$\overset{\frown}{PC}$ 與$\overline{BC}$圍成區或面積為＝__________。

(12) 左圖扇形A−$\overset{\frown}{BC}$，中心角$\angle BAC＝\dfrac{\pi}{4}$，

半徑$\overline{AB}=\overline{AC}＝10$，$PQRS$為內接正方形，

則(a)正方形$PQRS$的邊長為＝__________。

(b)斜線部分面積為＝__________。



(13) 考慮函數 $f(x)=2\sin 3x$，試問下列選項何者為真？

(A)$-2\le f(x)\le 2$ (B)$f(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{6}$時有最大值 (C)$f(x)$的週期為$\dfrac{2\pi}{3}$ (D)$y=f(x)$的圖形對稱於直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ (E)$f(2)>0$ (88 社)

(14) 求下列各函數的週期：

(a)$-2\sin\dfrac{x}{3}$ (b)$|\sec 3x|$ (c)$4+3\sin(5x+2)$ (d)$\tan(\dfrac{\pi-2x}{3})$

(15) 某工廠使用的交流電電流強度 I(安培)隨時間 t(秒)的變化函數為

$I=10\sin(120\pi t+\dfrac{\pi}{3})$。

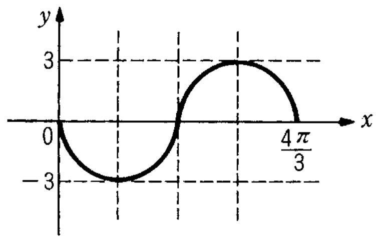
試回答下列各小題：

(a)求電流變化強度的週期。(b)試問電流強度的最大值與最小值。

(c)當 $t=\dfrac{1}{48}$秒時，電流的強度等於多少安培。

(16) 把函數$y＝\cos x$圖形向右平移$\dfrac{\pi}{6}$單位，成為函數__________之圖形，

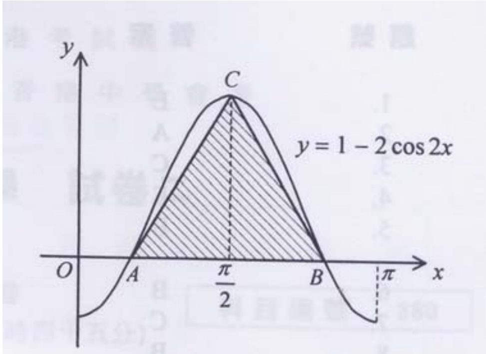
接著向上平移$\dfrac{1}{2}$單位，成為函數__________之圖形。



(17) 如圖，若 $y＝a\sin bx$，$b＞0$，則數對(a,b)=___________。

(18) 當 x 介於 0 與 2π 之間，直線 $y=1-x$ 與函數 $y=\tan x$ 的圖形，共有幾個交點？ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4　(87 學科)

(19) 如右圖，請問ΔABC 的面積是＿＿＿＿＿。



(20) 試求下列各小題：

(a)求方程式 $\sin x=\frac{1}{3}$在$[0,4\pi]$內根的個數。

(b) 方程式$\frac{2}{3}x\sin x=1$ 在$-\pi<x<\pi$的區間內有多少個實根？

(c) 方程式 $\cos x=\frac{x}{10}$ 的實根個數。

(21) 若 $\sin x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $0\leq x\leq 2\pi$，求 x 的範圍。

(22) (三角函數的建模)

蘇軾曾在一闕詞中寫道：「人有悲歡離合、月有陰晴圓缺」，自古人類仰望天空，就發現月亮會有週期性的變化，因此很多民族都曾根據大量的觀察資料，發展出以月亮為準的陰曆。下表是 2008 年某地區 1 月份從 1 日開始，每隔二個夜晚觀察月球，月球出亮面比例的資料。

一月份	1日	3日	5日	7日	9日	11日	13日	15日	17日	19日	21日	23日	25日	27日	29日	31日
月亮亮面比例(%)	42	24	10	2	0	8	23	43	66	85	97	100	92	77	60	41

設從 1 月 1 日開始經過的天數為 x (以 1 月 1 日當成第 0 天)，月球亮面的百分比為 y，據此可以繪製出散布圖，我們用函數 $y=0.5\sin(bx-h)+k$ (b 為正數)來擬合這些資料點所成的散布圖。

分析圖 2–23 可以得知以下資料：

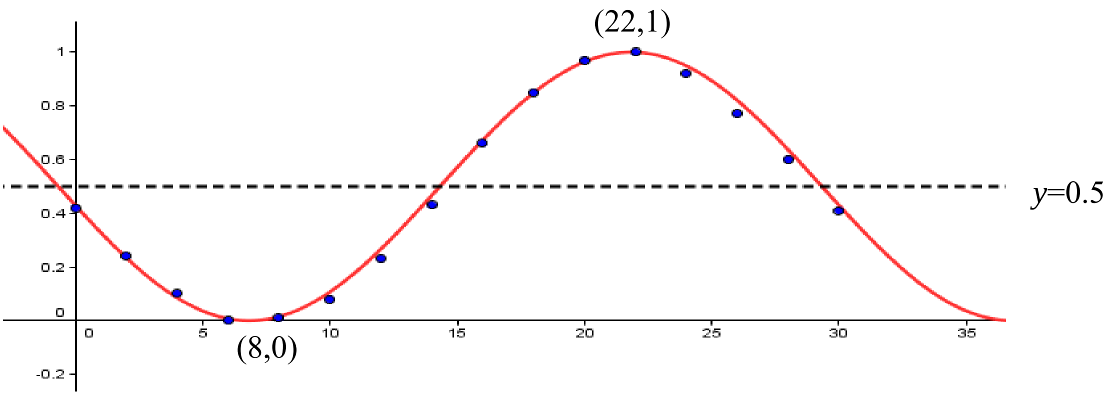
(1°)直線 $y=0.5$ 通過函數 $y=0.5\sin(bx-h)+k$ 的對稱點。

(2°)資料點(22,1)、(8,0)、(0,0.42)都落在圖形上。

(3°)資料點(22,1)、(8,0)分別為圖形的最高點與最低點。

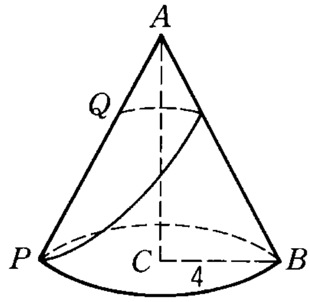
試回答下列各小題：

(1)函數 $y=y=0.5\sin(bx-h)+k$ 的週期。(2)試求 b、k 與 $\sin h$ 的值。

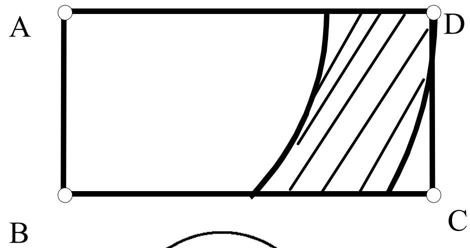


進階問題

(23) 設 x,y 為正實數，且 $x+y\neq 0$，若 $\sec 2\theta=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ ，求$\dfrac{x}{y}$=？



(24) 如圖的直圓錐，底半徑 4，高 $8\sqrt{2}$，試求：
(a)直圓錐之側表面積為多少？
(b)若自錐底 P 點出發，沿圓錐側面繞行一圈，到達斜高 $\overline{AP}$ 之中點 Q 停止，則路線長之最小值為多少？



(25) 設 AB=a，AD=$2a$，在矩形 ABCD 中，以 A 為圓心，$\sqrt{2}$a 及 $2a$ 為半徑作圓，試求斜線部分的面積。

(26) 半徑為 3，1 的兩圓輪相外切，如圖，
一皮帶緊繞此兩圓輪，則此皮帶長為____________。