第六單元　多項式

(甲)多項式的基本定義與性質

(1)何謂多項式：

在代數中，我們通常會引進一些符號 x,y,z 等，用以表示一給定問題的未知數，有了這一些符號，可將問題中量與量之間的關係列成算式，而將給定的問題轉成方程式的問題，而在解方程式的過程中，跟數一樣，會牽涉到數與式之間的運算。將數及具有數的性質的符號 x,y,z 等，經過加、減、乘的運算所形成的式子，叫做**多項式**。

多項式中，只含有一個符號 x，叫做**單元多項式**，含有多於一個的符號，叫做**多元多項式**。

(2)單元多項式：

若$a_n,a_{n-1},\ldots a_1,a_0$均為實數，形如$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$這樣的式子稱為$x$的單元多項式，也可簡稱為**$x$的多項式**。

(3)相關的名詞說明：

設$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，$a_n,a_{n-1},\ldots a_1,a_0$均為實數

① 項：$a_nx^n,a_{n-1}x^{n-1}$，$\ldots,a_1x,a_0$分別稱為此多項式的n次項,$n-1$ 次項,…一次項,常數項。

② 係數：$a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$分別為此多項式的$n$次項,$n-1$ 次項,…一次項,常數項的係數。

③ 領導係數：多項式中最高次項之係數(不為 0)稱為此多項式之領導係數。

④ 次數：當$a_n\neq0$ 時，稱此多項式為n次多項式，記為：$\deg f(x)=n$。

⑤ 單項式：只有一項的多項式稱為單項式。

⑥ 常數多項式：若一多項式僅含常數項a_0，則稱此多項式為常數多項式。
當$a_0\neq0$，又稱為零次多項式。當$a_0=0$，又稱為零多項式。

⑦ 升冪與降冪式：若一多項式一變數 x 的次方由大而小排列者稱為降冪式，由小而大排列者稱為升冪式。

⑧由多項式的係數決定多項式全體所成的集合：

Z[x]表由全體整係數多項式所成的集合

Q[x]表由全體有理係數多項式所成的集合

R[x]表由全體實係數多項式所成的集合

C[x]表由全體複係數多項式全體所成的集合

[本單元中，若沒有指定多項式的係數所在的數系，則多項式均為實係數多項式]

(4)多項式的相等：

兩個多項式 $f(x)$與 $g(x)$爲兩個非零多項式，

若 $f(x)$與 $g(x)$相等⇔兩者的次數相同，對應項的係數也一樣。

[例題1] $f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，則
各項係數之和=　　　　　，常數項=
奇次項係數之和=　　　　　　　，偶數項的係數之和=
$a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots..=$　　　　　　　，$a_1-a_3+a_5-a_7+\ldots=$

結論：

$f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，則

各項係數之和=$f(1)$，常數項=$f(0)$

奇次項係數之和= $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$，偶數項的係數之和= $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

$f(i)$之實部=$a_0-a_2+a_4-a_6+\ldots..$，$f(i)$之虛部=$a_1-a_3+a_5-a_7+\ldots.$

(乙)多項式的運算

(1)多項式的加減法：兩多項式相加減，則同次項的係數相加減。

例如：$f(x)=6x^4-7x^3+2x+7$，$g(x)=-5x^5+2x^3-3x^2+8x-9$

$f(x)+g(x)=-5x^5+6x^4-5x^3-3x^2+10x-2$

$f(x)-g(x)=5x^5+6x^4-9x^3+3x^2-6x+16$

$\boxed{\deg (f(x)\pm g(x)) \le \mathrm{Max}(\deg f(x),\deg g(x))\text{或}f(x)\pm g(x)=0}$

(2)多項式的乘法：利用乘法對加法的分配律，再合併同類項。

例如：$f(x)=3x^3-2x^2+x-4$，$g(x)=4x^2-6x+1$

直式運算：$f(x)\cdot g(x)$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
 & 3x^3 & - & 2x^2 & + & x & - & 4 & & & & \\
\times & 4x^2 & - & 6x & + & 1 & & & & & & \\
\hline
 & 12x^5 & - & 8x^4 & + & 4x^3 & - & 16x^2 & & & & \\
 & & - & 18x^4 & + & 12x^3 & - & 6x^2 & + & 24x & & \\
 & & & & & 3x^3 & - & 2x^2 & + & x & - & 4 \\
\hline
 & 12x^5 & - & 26x^4 & + & 19x^3 & - & 24x^2 & + & 25x & - & 4
\end{array}
$$

橫式運算：$f(x)\cdot g(x)$

$(3x^3-2x^2+x-4)\times(4x^2-6x+1)$
$=(3x^3-2x^2+x-4)\times 4x^2+(3x^3-2x^2+x-4)\times(-6x)+(3x^3-2x^2+x-4)\times 1$
$=(12x^5-8x^4+4x^3-16x^2)+(-18x^4+12x^3-6x^2+24x)+(3x^3-2x^2+x-4)$
$=12x^5-26x^4+19x^3-24x^2+25x-4$

deg $(f(x)\cdot g(x))$=[deg $f(x)$]·+ [deg $g(x)$]　(其中$f(x)$與$g(x)$均不爲零多項式。)

(3)多項式的除法：

除法原理： 設 $f(x)$，$g(x)$爲二多項式且 $g(x)$不是零多項式，則可找到唯一的多項式 $q(x)$及 $r(x)$滿足 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$，其中 $\mathbf{r(x)=0}$ **或 deg** $\mathbf{r(x)<}$**deg** $\mathbf{g(x)}$。 此時稱 $f(x)$爲**被除式**，$g(x)$爲除式，$q(x)$爲**商式**，$r(x)$爲**餘式**。

例如：設$f(x)=2x^3+5x^2+x-2$，$g(x)=x^2+2x-3$
(a)長除法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x+1 \\
\hline
x^2+2x-3 & 2x^3+5x^2+x-2 \\
 & 2x^3+4x^2-6x \\
\cline{2-2}
 & \quad x^2+7x-2 \\
 & \quad x^2+2x-3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad 5x+1
\end{array}
$$

(b)綜合除法：
綜合除法：
綜合除法的目的就是根據被除式中的各項係數和除式中的常數項，算出商式的各項係數和餘式的值。
①當除式$g(x)=x-a$時，我們介紹綜合除法去求商式、餘式。

例如：設$f(x)=2x^4+x^2-5x$，$g(x)=x-2$，求$f(x)$除以$g(x)$的商式、餘式。

$$
\begin{array}{ccccc|c}
2 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \\
\downarrow & 4 & 8 & 18 & 46 & \\
\hline
2 & 4 & 9 & 23 \;, & 46 &
\end{array}
$$

商　　　　式　，　餘　式

②綜合除法的原理：
設$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，$g(x)=x-b$，若存在商式 $q(x)=c_2x^2+c_1x+c_0$，餘式$r(x)=d$。
由除法的定義：$(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=(c_2x^2+c_1x+c_0)(x-b)+d$

經比較係數可得：$\begin{cases} a_3=c_2 \\ a_2=-c_2b+c_1 \\ a_1=-c_1b+c_0 \\ a_0=-c_0b+d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2=a_3 \\ c_1=a_2+c_2b \\ c_0=a_1+c_1b \\ d=a_0+c_0b \end{cases}$

上面的關係可寫成以下的形式：

$f(x)=$	a_3	a_2	a_1	a_0	
$(+)$	$\downarrow$	c_2b	c_1b	c_0b	b
	a_3	a_2+c_2b	a_1+c_1b	$,a_0+c_0+b$	
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
$q(x)=$	c_2	c_1	c_0	$,d$	$=r(x)$

③ 當$f(x)$除以$g(x)=ax+b$時，我們也可利用綜合除法求餘式$r(x)$、商式$q(x)$。

由除法的定義：$f(x)=(ax+b)\cdot q(x)+r(x)=(x+\frac{b}{a})\cdot[aq(x)]+r(x)$

可先利用綜合除法求出$f(x)$除以$(x+\frac{b}{a})$的商式$q'(x)=aq(x)$與餘式$r(x)$，

而要求的商式$q(x)=\frac{1}{a}\ q'(x)$，餘式$r(x)$不變。

例如：$f(x)=3x^3+5x^2-46x+42$ 除以$g(x)=3x-7$

$f(x)=$	3	5	-46	42	$\frac{7}{3}$
$(+)$	$\downarrow$	7	28	-42	
$3\cdot q(x)=$	3	12	-18	$,0$	$=r(x)$
$q(x)=$	1	4	-6		

[討論]：

令$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$，$g(x)=x-b$，$f(x)$除以$g(x)$

所得的商式爲$q(x)=c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_1x+c_0$，餘式$=r$。

如何由a_n , a_{n-1} , ….,a_1 , a_0 , b去求c_n , c_{n-1} ,….,c_0。

[討論]：

設$f(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，$g(x)=x^2+bx+c$，

$f(x)$除以$g(x)$所得的商式爲$q(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$，餘式$r(x)=mx+n$，仿照前面的討論，可否找到類似綜合除法的方式去求出$q(x)$、$r(x)$。

(練習1) 設 $f(x)$爲一多項式，a,b 爲實數，$a\neq0$，若以 $x-\frac{b}{a}$ 除以 $f(x)$，所得的商式爲 $Q(x)$，餘式爲 r。則

(1)以 $ax-b$ 除 $f(x)$，得商爲_______，餘式爲_______。

(2)以 $x-b$ 除 $f(\frac{x}{a})$，得商爲_______，餘式爲_______。

(3)以 $x-b$ 除 $a\,f(\frac{x}{a})$，得商爲_______，餘式爲_______。

(4)以 $x-\frac{1}{a}$ 除 $f(bx)$，得商爲_______，餘式爲_______。

Ans：(1)$\frac{1}{a}Q(x)$，r (2)$\frac{1}{a}Q(\frac{x}{a})$，$r$ (3)$Q(\frac{x}{a})$，ar (4)$b\cdot Q(bx)$，r

(練習2) 多項式$f(x)=(x^5-2x^3+x+1)^{1999}$展開式中，試求下列各小題：

(1)各項係數和 (2)常數項 (3)奇數項係數和 (4)偶數項係數和

Ans：(1)1,(2)1,(3)0,(4)1

(練習3) 已知x^2+ax+1 能整除x^3+3x^2+bx+2，試求a,b之值。 Ans：$a=1,b=3$

(練習4) 利用綜合除法計算下列各題之商式與餘式：

(1)以$x+4$ 除 $2x^4+3x^2-5x-4$；(2)以 $3x+7$ 除 $6x^3+12x^2+11$

Ans：(1)商式$=2x^3-8x^2+35x-145$,餘式$=576$(2)商式$=2x^2-\frac{2}{3}x+\frac{14}{9}$,餘式$=\frac{1}{9}$

(丙)除法原理的應用

(1)餘式定理：多項式 $f(x)$除以 $x-a$ 的餘式等於 $\boldsymbol{f(a)}$。

證明：

由多項式的除法原理得知，恰有兩多項式 $q(x)$及 r(r 爲常數多項式)

滿足 $f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r$，而此等式爲恆等式，

因此將 $x=a$ 代入上式，得 $f(a)=(a-a)\cdot q(a)+r = r$。

推廣：多項式 $f(x)$除以 $ax+b$ 的餘式等於 $f(-\frac{b}{a})$。

$f(a)$的雙重意義：
①多項函數 $f(x)$在 $x=a$ 的函數值。
②多項式 $f(x)$除以 $x-a$ 的餘式。

[例題2] 求下列二小題：

(1)求$(x^3+2x^2-x-4)^3$除以$x+3$ 的餘式。

(2)設$f(x)=1250x^6-2790x^5-3125x^4+707x^3+100x^2+45x-62$，則$f(3)=$？

Ans：(1)-1000　(2)217

[例題3] 試求下列各小題：

(1)設多項式$f(x)$不低於 2 次，以$x-1$ 除之餘 2，以$x+2$ 除之餘-1，則以$(x-1)(x+2)$除$f(x)$的餘式爲何？

(2)設多項式$f(x)$不低於 3 次，以$x-1$ 除之餘 3，以$x+1$ 除之餘 1，以$x-2$ 除之餘-2，則求以$(x-1)(x+1)(x-2)$除$f(x)$的餘式。

(3) 多項式$f(x)$以x^2+2x+3 除之，餘式爲$x+12$，以$(x+1)$除之餘式爲-1，則$f(x)$除以$(x+1)(x^2+2x+3)$之餘式爲何？

Ans：(1)$x+1$　(2)$-2x^2+x+4$　(3) $-6x^2-11x-6$

(練習5) $f(x)=2x^4+3x^3+5x^2-6$，求 $2x-1$ 除$f(x-3)$的餘式。　Ans：$\frac{113}{2}$

(練習6) 試求 $11^5-4\cdot11^4-72\cdot11^3-56\cdot11^2+15\cdot11+7$ 之值爲________。Ans：51

(練習7) 多項式 $f(x)$除以 $x-3$ 得餘式 16，除以 $x+4$ 得餘式-19，則 $f(x)$除以$(x-3)(x+4)$所得的餘式為_________。 Ans：$5x+1$

(練習8) 多項式$f(x)$以x^2-3x+2 除之餘式為 3，以x^2-4x+3 除之得餘式為 $3x$，則以x^2-5x+6 除之餘式為________。 Ans：$6x-9$

(練習9) 多項式$f(x)$以x^2+2x+2 除之，餘式為$x+3$，以$(x+1)$除之餘式為-1，則$f(x)$除以$(x+1)(x^2+2x+3)$之餘式為何？ Ans： $-3x^2-5x-3$

(2)因式定理

設 $f(x)$、$g(x)$為兩個多項式，且 $g(x)$不是零多項式，

若 $f(x)$被 $g(x)$整除(餘式為零多項式)，則存在一個多項式 $q(x)$，使得 $f(x)=g(x)\cdot q(x)$，

此時 $g(x)$稱為 $f(x)$的**因式**，$f(x)$稱為 $g(x)$的**倍式**。符號可以記為 $g(x)|f(x)$。

[問題與討論]：

設$f(x)=x^2-9=(x-3)(x+3)$

請問 $x-3,\frac{1}{2}(x-3),\sqrt{5}\ (x-3)$都是 $f(x)$的因式嗎？

因式定理：

設 $f(x)$是一個 n 次多項式，且 $a\neq 0$，則 $ax-b$ 是 $f(x)$的因式 $\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$。

因式定理是餘式定理的推論，其概念是整除 $\Leftrightarrow$ 餘式為零多項式

根據因式定理對一個多項式 $f(x)$而言，$f(a)=0$ 代表下列四個涵義：

(1°)$f(x)$在 $x=a$ 的取值為 0。

(2°)a 為方程式 $f(x)=0$ 的一個根(解)。

(3°)$f(x)$除以 $x-a$ 的餘式 $f(a)$等於 0。

(4°)$x-a$ 為 $f(x)$的因式。

[例題4] 因式定理的推廣

若設$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$為相異實數，且$f(a_i)=0$，$i=1,2,\ldots,n$

則$f(x)$含有n次因式$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$。

[例題5] 試求三次多項式 $f(x)$，滿足 $f(11)=f(12)=f(13)=1$，$f(14)=19$
Ans：$f(x)=3(x-11)(x-12)(x-13)+1$

(練習10) (1)若 $f(x)=3x^4+mx^2+nx-2$ 含有因式 x^2-x-2，試求係數 m,n。
(2)若 $f(x)=3x^4+mx^2+nx-2$ 含有因式 x^2-x+2，試求係數 m,n。
Ans：(1)$m=-8$、$n=-7$　(2)$m=7$、$n=2$

(練習11) 試求三次多項式 $g(x)$ 滿足 $g(1)=g(3)=g(5)=0$，且 $g(7)=96$。
Ans：$g(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)$

(練習12) a,b,c 為整數，$0<a<b$，若 $x-c$ 為 $x(x-a)(x-c)-17$ 的因式，則 $(a,b,c)=$？
Ans：(2,18,1)

(3)一次因式檢驗定理：

設 $f(x)=2x+3$，$g(x)=5x^2-x+7$，$h(x)=f(x)\cdot g(x)=10x^3+13x^2+11x+21$，$10x^3$ 是 $2x\cdot 5x^2$ 來的，21 是 $3\cdot 7$ 來的，因此觀察一次式 $2x+3|h(x)$，而 $2|10$，$3|21$，這個結果對於一般整係數的多項式也是成立，我們將它寫成下面的定理：

定理：設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ 為一個**整係數** n 次多項式， 若整係數一次式 $\boldsymbol{ax-b}$ 是 $\boldsymbol{f(x)}$ 的因式，且 $\boldsymbol{a,b}$ **互質**，則 $\boldsymbol{a|a_n}$ 且 $\boldsymbol{b|a_0}$。

證明：

注意：

(a)一次因式檢驗定理的逆敘述不成立。

例如：$f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$，$f(-\frac{1}{3})\neq 0$。

(b)由一次因式檢驗定理，可知若一次式$cx-d$中c不為a_n的因數或d不為a_0的因數的話，則$cx-d$必不為$f(x)$的因式。**故只有滿足$a|a_n$且$b|a_0$的一次式$ax-b$才有可能成為$f(x)$的因式，因此我們只要從滿足$a|a_n$且$b|a_0$這些$ax-b$去找一次因式就可以了。**

例如：

求整係數$f(x)=3x^3+5x^2+4x-2$ 的整係數一次因式。

根據一次因式檢驗定理，假設$ax-b$為$f(x)$的一次因式，則$a|3$ 且$b|2$。

我們將所有可能的$ax-b$組合$x+1,x-1,x+2,x-2,3x+1,3x-1,3x+2,3x-2$，再

利用綜合除法檢驗看看那一個是$f(x)$的因式$\Rightarrow 3x-1$ 是$f(x)$的因式。

[討論]：設$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\in Z[x]$，則方程式$f(x)=0$ 的有理根必為整數根嗎？

[例題6] 求$f(x)=2x^4+5x^3-x^2+5x-3$ 的一次因式。 Ans：$2x-1$ 與$x+3$

[例題7] 設a,b,c為整數，且$x^4+ax^3+bx^2+cx+9=0$ 之四根為相異之有理數，求a,b,c之值。
Ans：$a=0,b=-10,c=0$

(練習13) 找出$f(x)=6x^4-7x^3+6x^2-1$ 的所有整係數一次式。
Ans：$2x-1$、$3x+1$

(練習14) 設$f(x)=x^4-x^3+kx^2-2kx-2$ 為整係數多項式，且$f(x)$有整係數一次因式，求k之值。 Ans：$0,-2$

(練習15) p,q為整數，且方程式$x^4-2x^3+px^2+qx+35=0$ 有四個相異有理數，求其最大之有理根_____。 Ans：7

(練習16) 求證：在 $Z[x]$中找不到一個多項式 $f(x)$滿足 $f(7)=5$ 且 $f(15)=10$。

(3)多項式的求值

[例題8] 設多項式$f(x)=2x^4-7x^3+x^2+5x+5= a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+d(x+1)+e$
(1)求a,b,c,d,e之值。
(2)求$(x+1)^2$除$f(x)$ 之餘式。
(3)求$f(-0.999)$的近似值到小數點後第三位。
Ans：(1)$a=2,b-15,c=34,d=-26,e=10$ (2)$-26x-26$ (3)9.974

[例題9] 求 $4(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^4-8(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^3-15(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^2+13(\frac{3+2\sqrt{2}}{2})+1$ 之值。Ans：2

(練習17) 設 $2x^4-23x^3+31x-7=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$，
則求a,b,c,d,e之值。Ans：$a=2,b=-7,c=-90,d=-181,e=-97$

(練習18) 設$f(x)=54x^3-99x^2+66x-20 = a(3x-1)^3+b(3x-1)^2+c(3x-1)+d$，
(1)試求數對$(a.,b,c,d)$=？ (2)求$f(0.333)$的近似值到小數點後第三位。
Ans：(1)$a=2,b=-5,c=6,d=-7$ (2)-7.006

(練習19) 將$f(x)=(x-3)^4+5(x-3)^3+6(x-3)^2+11(x-3)+13$ 展成x的多項式，依降次排列為何？ Ans：$x^4-7x^3+15x^2+2x+20$
[提示：可令$y=x-3\Rightarrow x=y+3$，原來的多項式可化為
$f(y)=y^4+5y^3+6y^2+11y+13$，再利用綜合除法將$f(y)$化為$y+3$ 的多項式
即為所求。]

(練習20) $8(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^3-16(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2+2(\frac{\sqrt{5}+1}{2})+15$ 的值可以化成$a+b\sqrt{5}$(a,b為整數)
試求(a,b)=？ Ans：$(a,b)=(8,1)$

(4)插值多項式

(a)造 Lagrange 多項式

某地區冬天的氣溫變化下表所示：

時間 t(時)	18	19	20	21
氣溫 y(°C)	8	6	10	12

估計 t=19.5 時該地區的氣溫約多少°C？

氣溫的變化圖可以視為連續函數，借用多項式函數 $y=f(x)$來逼近，先求出一個通過四點的「三次函數 $f(x)$」，即 $f(18)=8$、$f(19)=6$、$f(20)=10$、$f(21)=12$

再用 $f(19.5)$來估計氣溫。如何求 $f(x)$呢？

介紹法國數學家拉格朗日(Lagrange)的方法：

引入三次函數 P(x)、Q(x)、R(x)、T(x)滿足

x	**18**	**19**	**20**	**21**
P(x)	**1**	**0**	**0**	**0**
Q(x)	**0**	**1**	**0**	**0**
R(x)	**0**	**0**	**1**	**0**
T(x)	**0**	**0**	**0**	**1**

令 $f(x)=8\cdot P(x)+6\cdot Q(x)+10\cdot R(x)+12\cdot T(x)$，則 $f(x)$滿足 $f(18)=8$、$f(19)=6$、$f(20)=10$、$f(21)=12$

如何找 P(x)、Q(x)、R(x)、T(x)

$P(x)=\alpha(x-19)(x-20)(x-21)\Rightarrow P(18)=\alpha(18-19)(18-20)(18-21)\Rightarrow$

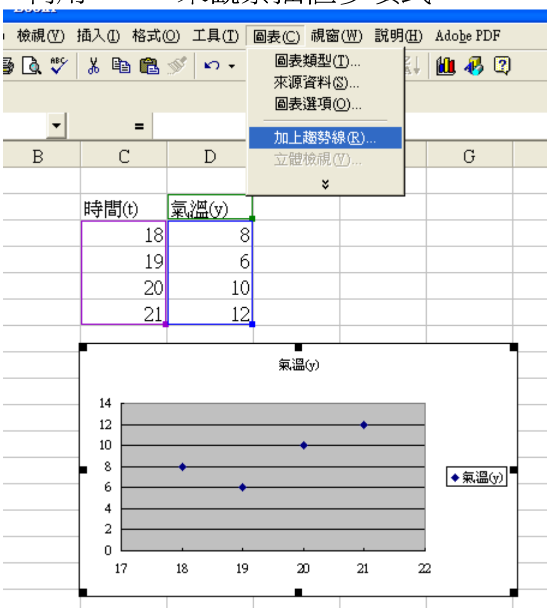
$\alpha=\dfrac{1}{(18-19)(18-20)(18-21)}$，故 $P(x)=\dfrac{(x-19)(x-20)(x-21)}{(18-19)(18-20)(18-21)}$。

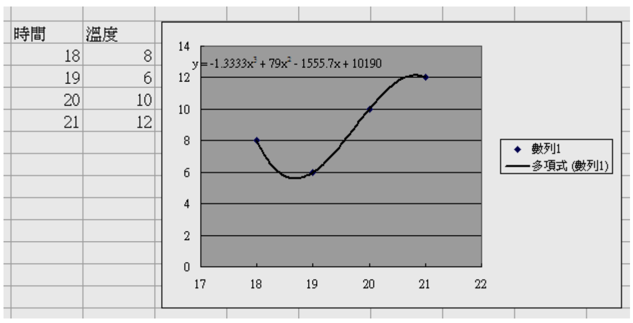
同理 $Q(x)=\dfrac{(x-18)(x-20)(x-21)}{(19-18)(19-20)(19-21)}$，$R(x)=\dfrac{(x-18)(x-19)(x-21)}{(20-18)(20-19)(20-21)}$，

$T(x)=\dfrac{(x-18)(x-19)(x-20)}{(21-18)(21-19)(21-21)}$。

$$\text{故 } f(x)=8\cdot\frac{(x-19)(x-20)(x-21)}{(18-19)(18-20)(18-21)}+6\cdot\frac{(x-18)(x-20)(x-21)}{(19-18)(19-20)(19-21)}$$
$$+10\cdot\frac{(x-18)(x-19)(x-21)}{(20-18)(20-19)(20-21)}+12\cdot\frac{(x-18)(x-19)(x-20)}{(21-18)(21-19)(21-21)}\text{。}$$

利用 Excel 來觀察插值多項式：





上述的想法可以推廣到一般情形。

拉格朗日(Lagrange)插值公式

(1)圖形通過(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、(a_3,b_3)三點的二次插值多項式為

$$f(x)=b_1\cdot\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+b_2\cdot\frac{(x-a_3)(x-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}+b_3\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\text{。}$$

(2)圖形通過(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、(a_3,b_3)、(a_4,b_4)四點的三次插值多項式為

$$f(x)=b_1\cdot\frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}+b_2\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$+b_3\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}+b_4\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}\text{。}$$

上述的想法可以推廣到一般情形：

> 給定兩兩不同的數$x_1,x_2,\ldots,x_n$及任意的$y_1,y_2,y_3,\ldots,y_n$
>
> 則多項式 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j})$ 滿足條件$f(x_k)=y_k$ $(k=1,2,..,n)$

[解法]：

根據前面的方法，可以得知令多項式$f_i(x)=y_i\cdot(\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j})$會滿足$f_i(x_k)=\begin{cases}y_i\ ,k=i\\ 0\ ,k\ne i\end{cases}$。

因此$f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}(y_i\cdot\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j})$。

[討論]：還有其它方法可以找一個通過四點的「三次函數 $f(x)$」，滿足 $f(18)=8$、$f(19)=6$、$f(20)=10$、$f(21)=12$ 嗎？

(b)唯一性：

求出一個通過四點的「三次函數 $f(x)$」，滿足 $f(18)=8$、$f(19)=6$、$f(20)=10$、$f(21)=12$

這樣的三次函數唯一存在嗎？不同的方法，求出來的多項式函數會一樣嗎？

設三次多項式 $g(x)$滿足 $g(18)=8$、$g(19)=6$、$g(20)=10$、$g(21)=12$

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，則 $h(18)=h(19)=h(20)=h(21)=0$，

根據因式定理：$h(x)$含有三次因式$(x-18)(x-19)(x-20)$

故可令 $h(x)=a(x-18)(x-19)(x-20)$，又 $h(21)=0\Rightarrow a=0$。因此 $f(x)=g(x)$。

一般情形：

設多項式$f(x)$與$g(x)$的次數$\leq n$，若有$(n+1)$個值：$x_1 , x_2 , \ldots, x_n , x_{n+1}$，

滿足$f(x_i)=g(x_i)$，$i=1,2,..,n+1$，則$f(x)$與$g(x)$就是同一個多項式，即$f(x)=g(x)$。

(練習21) 找三次多項式 $f(x)$使得 $f(1)=1$，$f(2)=3$，$f(3)=2$，$f(4)=5$。

Ans：

$$f(x)=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+3\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$
$$+2\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+5\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

(練習22) 設 a,b,c 兩兩相異，且 n 次多項式 $f(x)$ ($n\geq 3$)除以$(x-a)(x-b)(x-c)$的餘式$r(x)$爲二次式。試說明：二次函數 $y=r(x)$就是通過 $y=f(x)$圖形上三點A$(a,f(a))$、B$(b,f(b))$、C$(c,f(c))$的拋物線。

綜合練習

(1) 設多項式$f(x)$除以x^3-1 的餘式爲x^2-1，求$f(x)$除以x^2+x+1 的餘式。

(2) 設 $f(x)=9x+4$，$p(x)$爲一個 m 次多項式且 $m>1$，又 $p(x)=g(x)f(x)+r(x)$，其中 $r(x)$爲常數多項式。則下列敘述何者正確？

(A)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式爲 $9g(x)$ (B)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式爲 $g(x)$

(C)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式爲$\frac{1}{9}g(x)$ (D)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其餘式爲 $r(x)$

(E)以 $x+\frac{4}{9}$除 $p(x)$，其商式爲 $r(x)+9$

(3) 設$f(x)=(x-2)^8$，$g(x)=(x^2-x+1)^{10}$，試求

(a)$f(x)\cdot g(x)$乘積中各項係數和。

(b) $f(x)\cdot g(x)$乘積中偶次項係數和。

(4) 設$f(x)=x^3-4x^2+7x-1=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，$a,b,c,d$爲實數
(a)求a,b,c,d的值。
(b)求$f(2.003)$的近似值至小數點後第三位。
(c)求$f(2+\sqrt{3})$的值。
(d)以$(x-2)^2$除$f(x)$的餘式。

(5) 若$f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則多項式$g(x)=f(f(x))$除以$x-2$所得的餘式爲多少？
(A) 3　(B) 5　(C) 7　(D) 9　(E) 11　(92 學科)

(6) 學生練習計算三次多項式 $f(x)$除以一次多項式 $g(x)$的餘式。已知 $f(x)$的三次項係數爲 3，一次項係數爲 2。甲生在計算時把 $f(x)$的三次項係數錯看成 2(其他係數沒看錯)，乙生在計算時把 $f(x)$的一次項係數錯看成-2(其他係數沒看錯)。而甲生和乙生算出來的餘式剛好一樣。試問 $g(x)$可能等於以下那些一次式？
(1)x　(2)$x-1$　(3)$x-2$　(4)$x+1$　(5)$x+2$。　(95 學科)

(7) 試證明下列兩小題：
(1)$x-1$ 爲x^n-1 的因式。 (n爲正整數)
(2)$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$。

(8) 設r,s爲整數，已知整係數多項式$x^3+rx+s=0$ 的因式分解是
$x^3+rx+s=(x+a)^2(x+b)$，其中a,b爲相異實數，求證a,b都是有理數。

(9) 設x^2+2x+3 爲$f(x)=3x^4+8x^3+ax^2+4x+b$之因式，則$a=$___，$b=$____。

(10) 設 $a>b>c>0$，a,b,c 爲整數，若 $x-c$ 爲 $f(x)=x(x-a)(x-b)-2$ 的因式，
則求 $a+b+c$ 之值。

(11) 設 n 次多項式 $f(x)$分別除以$(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$的餘式依次爲 5 , 3, 7 ，試求$f(x)$除以$(x-1)(x-2)(x-3)$所得的餘式。

(12) 設$f(x)$與$g(x)$爲實係數多項式，以x^2-3x+2 除$f(x)$得餘式 $3x-4$，以$x-1$ 除$g(x)$得餘式 5，試求以$x-1$ 除$f(x)+g(x)$的餘式。

(13) 求以 $7x^5+x^4+x^3+x^2+x-6$ 之整係數一次因式。

(14) 設$f(x)$爲一多項式，若$(x+1)\cdot f(x)$除以x^2+x+1 的餘式爲 $5x+3$，則$f(x)$除以x^2+x+1 的餘式爲________。

(15) 設多項式$f(x)$分別除以x^2+x-2，x^2-x-6，x^2+x-12 所得餘式依次爲 $2x+3$，$3x+a$，$4x+b$，試求a,b之值。

(16) $\deg f(x)\geq 3$，以 $2x^2+x+3$ 除$f(x)$餘式 $2x+5$，以$x+2$ 除$f(x)$餘式 19，則以$(2x^2+x+3)(x+2)$除$f(x)$ 的餘式爲何？

(17) 設$f(n)=1^2+2^2+\dots+n^2$ (從 1^2連續加n項到n^2)爲一個n的三次函數，
即$f(1)=1^2$，$f(2)=1^2+2^2$，…
(a)試求$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)$的值。
(b)利用拉格蘭日插值法求$f(n)$。

(18) 一個人運動時，每分鐘的心跳次數不應當超過一個最大值(此最大值稱爲最大心律)，最大心律與性別、年齡和靜止心律(沒運動時，每分鐘的心跳次數)有關，下表是 20 歲的女性靜止心律與其最大心律：

靜止心律 **x**(每分鐘的心跳次數)	最大心律 **y**(每分鐘的心跳次數)
50	**170**
60	**172**
70	**175**
80	**182**

(a)找一個三次函數 $y=f(x)$通過資料點(50,170)、(60,172)、(70,175)、(80,182)。

(b)利用這個三次函數來估計當靜止心律爲 72 時，最大心律的值。

(四捨五入至整數位)

進階問題

(19) 歷史學家爲了推敲大數學家歐幾里得的出生年份，發現在西元前 336 年時，流傳了一則有趣的故事：那一年的某一天，歐幾里得造了一個整係數的多項式，並興高采烈的跟旁人說「**我現在的年齡剛好是這個多項式的一個根。**」旁人爲了想知道歐幾里得的年齡，於是將 7 及一個比 7 大的整數代入歐幾里得的多項式，結果得到 77 及 85 的值。這時候歐幾里得笑著說：「**我的年齡有你代的數那麼小嗎？**」你能根據這些史料推測出歐幾里得出生的年份嗎？

(20) 設$\deg f(x)\ge 3$，且$f(x)$以$(x-1)^2$除之，餘 $3x+2$，以$(x+2)^2$除之，餘 $5x-3$，則求(a)以$x-1$ 除之的餘式。 (b)以$(x-1)(x+2)$除之的餘式。 (c)以$(x-1)^2(x+2)$除之的餘式。

(21) 設$f(x)=(x+1)(x+3)(x+5)\cdots(x+29)(x+31)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$，但$a_n\neq 0$，試求$n$，$a_n$，$a_{n-1}$，$a_{n-2}$。

(22) (a)設 $f(x)$是多項式，n 爲自然數，$h\neq k$ 證明：$\deg f(x)=n \Leftrightarrow \deg[f(x+h)-f(x+k)]=n-1$。
(b)若多項式 $f(x)$對於所有的實數 x 滿足 $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=x+1$，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，求 $f(x)=$？

(23) $f(x)$之各項係數和爲 12，奇次項係數和爲 18，且 $f(x)$除以 $x-3$ 之餘式爲-4，商爲 $Q(x)$，則以 $Q(x)$除以 $x+1$ 之餘式爲_______。

(24) 設$f(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$爲一整係數$n$次多項式，
若$f(x)=(px+q)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)$，其中$p,q$爲兩個互質的整數，
則$b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0\in Z[x]$。

(25) 設$f(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots b_1x+b_0$爲一整係數$n$次多項式，而$a$爲整數。
求證：$f(f(a)+a)$恆有$f(a)$之因數。